Gruppe A

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/7	/7	/8	/8

1. Gegeben ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Argumentieren Sie, dass die Abbildung φ linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis K des Kern von φ und dessen Dimension.

(c) Bestimmen Sie eine Basis B des Bildes von φ und dessen Dimension.

(d) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Ist für $\boldsymbol{b} = (5, -6)^{\mathrm{T}}$ das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nicht lösbar, eindeutig, oder mehrdeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben sei der Vektorraum $\mathcal{P}_2$, jene Polynome mit Grad höchstens 2 über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, also

$$\mathcal{P}_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Menge $\mathcal{U}$ gegeben durch

$$\mathcal{U} = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \colon p(0) = p(-1)\}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{P}_2$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathcal{U}$ und dessen Dimension.

(c) Ist $q(x) = x^2 - x \in \mathcal{U}$?

3. Sei $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Vektorraum der komplexen 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Matrizenaddition und Multiplikation mit einem Skalar. Betrachten Sie $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$, gegeben durch

$$\mathcal{H} = \left\{ H = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ einen Unterraum von $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ (über $\mathbb{R}$) bildet.

(b) Bestimmen Sie eine Basis D von $\mathcal{H}$ und geben Sie die Dimension von $\mathcal{H}$ an.

(c) Begründen Sie, warum $(\mathcal{H}, +)$ eine Gruppe darstellt.

(d) Zeigen Sie, dass jede Matrix $H \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ invertierbar ist und für die inverse Matrix $H^{-1} \in \mathcal{H}$ gilt.

(e) Argumentieren Sie, warum $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation kein Körper ist.
Hinweis: Finden Sie ein Gegenbeispiel in $(\mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}, \cdot)$.

4. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathcal{U} = \{(a+b, 2a+c, -2b-c, -2c)^{\mathrm{T}} : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{W} = \{(2x-y, x+y, -x+y, 2x+2y)^{\mathrm{T}} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Bilden $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ eine direkte Summe?

(c) Geben Sie einen Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ an, der nicht in $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ liegt.

Gruppe B

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/7	/7	/8	/8

1. Gegeben ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Argumentieren Sie, dass die Abbildung φ linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis K des Kern von φ und dessen Dimension.

(c) Bestimmen Sie eine Basis B des Bildes von φ und dessen Dimension.

(d) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Ist für $\boldsymbol{b} = (8,\, 9)^{\mathrm{T}}$ das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nicht lösbar, eindeutig, oder mehrdeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben sei der Vektorraum $\mathcal{P}_2$, jene Polynome mit Grad höchstens 2 über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, also

$$\mathcal{P}_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Menge $\mathcal{U}$ gegeben durch

$$\mathcal{U} = \{p(x) \in P_2 \colon p(1) = p(0)\}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{P}_2$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathcal{U}$ und dessen Dimension.

(c) Ist $q(x) = x^2 + x + 1 \in \mathcal{U}$?

3. Sei $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Vektorraum der komplexen 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Matrizenaddition und Multiplikation mit einem Skalar. Betrachten Sie $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$, gegeben durch

$$\mathcal{H} = \left\{ H = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ einen Unterraum von $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ (über $\mathbb{R}$) bildet.

(b) Bestimmen Sie eine Basis D von $\mathcal{H}$ und geben Sie die Dimension von $\mathcal{H}$ an.

(c) Begründen Sie, warum $(\mathcal{H}, +)$ eine Gruppe darstellt.

(d) Zeigen Sie, dass jede Matrix $H \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ invertierbar ist und für die inverse Matrix $H^{-1} \in \mathcal{H}$ gilt.

(e) Argumentieren Sie, warum $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation kein Körper ist.
Hinweis: Finden Sie ein Gegenbeispiel in $(\mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}, \cdot)$.

4. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathcal{U} = \{(a + b, 2a + 3c, -2b - c, c)^{\mathrm{T}} : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{W} = \{(2x + y, -x - y, -x + y, -x + y)^{\mathrm{T}} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Bilden $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ eine direkte Summe?

(c) Geben Sie einen Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ an, der nicht in $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ liegt.