# Übungen zu Analysis 3, 14. Übung

1. Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $\psi$ auf $[0, \frac{1}{2})$ den Wert 1 und auf $(\frac{1}{2}, 1]$ den Wert $-1$ annimmt; bei $\frac{1}{2}$ und außerhalb von $[0, 1]$ sei sie Null. Nun setze für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 \leq k < 2^j$
$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad x \in [0, 1]\,.$$
Zeigen Sie, dass die Menge $\{\psi_{j,k}|_{[0,1]} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq k < 2^j\}$ der Haarschen Funktionen ein Orthogonalsystem (Skalarprodukt von 2 verschiedenen dieser Funktionen ergibt Null) auf $L^2([0, 1], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}}, \mathbb{C})$ bildet!

   Hinweis: Skizzieren Sie die Funktionen.

2. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, komplexwertige und messbare Funktion. Wir nehmen auch an, dass $f$ $2\pi$-periodisch ist, also $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man beweise, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,2\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[\alpha,\alpha+2\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda$$
in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch die beiden anderen existieren und alle diese Integrale übereinstimmen.

   Weiters zeige man, dass für ungerade ($g(-x) = -g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$, und dass für gerade ($g(-x) = g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = 2 \int_{[0,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$.

3. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Man bestimme die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f, e_n)e_n$ von $f$ bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(\mathrm{i}nx)$ in dem Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$!

   Wohin gegen konvergiert diese Reihe punktweise, also ausgewärtet bei einem festen $x \in \mathbb{R}$?

4. Zeigen Sie, dass in $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$
$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$
ein Orthogonalsystem (Skalarprodukt von 2 verschiedenen dieser Funktionen ergibt Null) abgibt. Wie muss man diese Funktionen skalieren, um ein Orthonormalsystem $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ zu erhalten? Zeigen Sie, dass $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ dann sogar eine Orthonormalbasis ist! Diskutieren Sie auch den Zusammenhang der Fourierreihe bezüglich dieser Orthonormalbasis und der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ aus dem vorherigen Beispiel. Schließlich gebe man die Fourierreihe bezüglich $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ für die Funktion aus dem vorherigen Beispiel an!

5. Sei $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$ ungerade, also $f(-x) = -f(x)$. Zeigen Sie, dass dann in der Fourierreihe von $f$ bezüglich der Orthonormalbasis $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ aus dem vorherigen Beispiel nur $\sin mx$ Terme auftreten!

   Betrachten Sie konkret $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 1 - x^2$ für $x \in (0, \pi]$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi, \pi]$ fortgesetzt wird, und berechnen Sie die entsprechende Fourierreihe. Wohin gegen konvergiert diese Reihe punktweise, also ausgewärtet bei einem festen $x \in \mathbb{R}$?

6. Man berechne die Fourierreihe von $f(x) = \frac{1}{2-\exp(ix)}$, $x \in [-\pi, \pi]$, bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(inx)$ von $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$. Konvergiert diese punktweise oder gar gleichmäßig und wogegen?

   Hinweis: Stellen Sie zuerst $f$ als geometrische Reihe dar!

7. Man entwickle $x \mapsto x \sin \pi x$, $x \in [-1, 1]$ in eine Fourierreihe der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(in\pi x)$$

   bzw.

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x) \, .$$

   Wohin gegen konvergiert diese Reihe punktweise, also ausgewärtet bei einem festen $x \in \mathbb{R}$?

8. Man berechne die Fourierreihe von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos \alpha x$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

   Weiters gebe man für alle $x \in \mathbb{R}$ den punktweisen Grenzwert an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ dieser Fourierreihen an.