Übungen zu Analysis 3, 13. Übung

1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller $(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3$ mit
$$3\eta + 3\xi\zeta^2 - \xi^3 = 0.$$
Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist! Bestimmen Sie ihre Dimension! Bestimmen Sie auch für jedes $(\xi, \eta, \zeta)^T \in M$ den Normalvektor auf den Tangentialraum durch diesen Punkt.

   Bezeichnet μ das Oberflächenmaß von M, so bestimme man $\mu(Z \cap M)$, wobei
$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 2,\ x > 0, z \geq 0\}.$$

2. Sei $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und $g_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $g_n * h$ sowie $(g_n * h) * h$. Sind die erhaltenen Funktionen stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar?

3. Für $G = (-1, +1)^p$ $(\subseteq \mathbb{R}^p)$ und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ mit $f(x) = x$ bestimme man ∂G, $\partial^s G$, $\partial^o G$ und berechne $\int_{\partial^o G} \nu(y)^T f(y)\, d\mu(y)$ direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz. Vergleiche Beispiel 15.9.8.

4. Für $G = U_1^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0)$, $g((x, y)^T) = x + y$ und $h((x, y)^T) = x + y$ weise man die zweite Greensche Identität nach, indem man beide Seiten explizit berechnet.

5. Sei $f : U_2^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0) \to (-\infty, \infty]$ definiert durch $f((x, y)^T) = -\ln \|(x, y)^T\|_2$. Zeigen Sie sorgfältig, dass für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : U_2^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0) \to \mathbb{R}$ mit $g|_{\mathbb{T}} \equiv 0$, wobei $\mathbb{T} = S^1 = \{(x, y)^T : \|(x, y)^T\|_2 = 1\}$, die Funktion $f \cdot \triangle g$ über $U_1^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0)$ nach λ_2 integrierbar ist und
$$\int_{U_1^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0)} f \cdot \triangle g \, \mathrm{d}\lambda_2 = -2\pi g(0)\,.$$
Hinweis: Zweite Greensche Identität angewendet auf $U_1^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0) \setminus K_\delta^{\mathbb{R}^2, \|.\|_2}(0)$ für $\delta \in (0, 1)$ und dann $\lim_{\delta \to 0+}$ .... in der erhaltenen Gleichung bilden!

6. Bezeichnet μ das Oberflächenmaß auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, so zeige man, dass $\mu = \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,2\pi)}} \circ T^{-1}$, wobei $T : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ durch $T(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ definiert ist.

   Weiters berechne man für $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mit $f(\zeta) = \sum_{j=-N}^{+N} a_j \cdot \zeta^j$ und $g(\zeta) = \sum_{j=-N}^{+N} b_j \cdot \zeta^j$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_j, b_j \in \mathbb{C},\ j \in \{-N, \ldots, +N\}$ das Integral
$$\int_{\mathbb{T}} f \cdot \bar{g} \, \mathrm{d}\mu\,.$$

7. Man zeige für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < +\infty$, dass $\chi(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) := \mu(A \triangle B)$ eine Metrik auf $\{[\mathbb{1}_A]_\sim : A \in \mathcal{A}\}$ abgibt, wobei $A \sim B$, wenn $\mu(A \triangle B) = 0$. Zeigen Sie auch, dass dieser metrische Raum vollständig ist.

   Hinweis: Was hat $\{[\mathbb{1}_A]_\sim : A \in \mathcal{A}\}$ mit $L^1(....)$ zu tun? Aus Konvergenz bezüglich $\|.\|_1$ folgt Konvergenz im Maß und daraus ....