Übungen zu Analysis 3, 12. Übung

1. Sei $d \in \mathbb{N}$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die durch $f((1, \dots, 1)^T) = 0$ und
$$f(x) = \|x - (1, \dots, 1)^T\|_2^\alpha$$
definierte Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ auf $K_2^{\mathbb{R}^d, \|.\|_2}(0)$ bzgl. dem Lebsgueschen Maß integrierbar und für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ nicht. Also ist die Menge der reellen α mit $\int_{K_2^{\mathbb{R}^d, \|.\|_2}(0)} f(x)\, d\lambda_d(x) < +\infty$ bzw. mit $\int_{K_2^{\mathbb{R}^d, \|.\|_2}(0)} f(x)\, d\lambda_d(x) = +\infty$ zu bestimmen.

2. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sei $\phi : D \to M$ eine Einbettung, und $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ mit $B \subseteq \phi(D)$. Zeige
$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s)\right\|_2^2 \left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s)\right\|_2^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s)\right)^2}\, d\lambda_2(s)\,,$$
wobei $(.,.)$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$ bezeichnet.
Im Falle $p = 3$ zeige man auch, dass
$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s)\right\|_2 d\lambda_2(s)\,,$$
wobei $x \times y$ das Kreuzprodukt zweier Dreivektoren ist:
$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, $r > 0, x \in \mathbb{R}^p$ fest. Zeigen Sie, dass mit M auch $N := rM + x$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist, dass für $B \subseteq M$ genau dann $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$, wenn $rB + x \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_N$, dass in dem Fall
$$\mu_N(rB + x) = r^d \mu_M(B)$$
und dass
$$\int_N f\, d\mu_N = r^d \int_M f(ry + x)\, d\mu_M(y)$$
für jede messbare Funktion $f : N \to [0, +\infty]$ und für jede messbare Funktion $f : N \to [-\infty, +\infty]$ $(\mathbb{C})$ in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte Seite es tut.

4. Man zeige mit Hilfe der allgemeinen Kugelkoordinaten explizit, also nicht mit den Integralsätzen, dass das Oberflächenmaß c_d der Kugeloberfläche S^{d-1} der Kugel mit Radius 1 im $\mathbb{R}^d$ genau $d \cdot \lambda_d(K_1^d(0))$ ist; siehe Beispiel 14.14.11!

5. Sei $f(x) = \mathbb{1}_{[-c,c]}(x)$ mit einem festen $c > 0$ und $g(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot e^{-x}$. Berechnen Sie die Faltung $f * g$.

6. Für die offene Einheitskugel $U_1(0)$ im $\mathbb{R}^2$ bezüglich $\|.\|_2$ sowie für die Abbildungen $f = \mathbb{1}_{U_1(0)}$ und $g((x, y)^T) = x^2 + y^2$ gebe man an, für welche $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ die Faltung $f * g((x, y)^T)$ definiert ist! Für diese $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ berechne man $f * g((x, y)^T)$!

7. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ das Vektorfeld $F((x_1, x_2, x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$. Man gebe $\partial^o G$ an und zeige, dass

$$\int_{\partial^o G} F(y)\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) = 4\pi\,.$$

Man berechne dieses Integral direkt und auch mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

8. Für $G = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4,\ 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$ gebe man $\partial G, \partial^s G$ und $\partial^o G$ an und berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_{\partial^o G} \nu(a)^T f(a)\, \mathrm{d}\mu(a)\,,$$

wobei $\nu(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist. Außerdem ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x, y, z)^T = (x + y, y + z, x + z^2)^T$.

9. Man betrachte folgende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M :\Leftrightarrow z > 0,\ 3x^2 - 4y + 2y^2 + 2z - 3 = 0\,.$$

Weiters sei G jene offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die von M und der xy-Ebene begrenzt wird.

Man bestimme $\partial G, \partial^s G, \partial^o G$ und berechne für

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z^2+1) \\ 7z \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_M \nu(a)^T F(a)\, \mathrm{d}\mu(a)\,,$$

wobei $\nu(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist.