Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 22.11.2024

Name (bitte ausfüllen): ....

Matrikelnummer (bitte ausfüllen): ....

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Faktorisieren Sie das Polynom $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ in reell irreduzible Faktoren und geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$ an!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Wie lauten die Summationsgrenzen ① und ② sowie die Exponenten ③ und ④ im Binomischen Lehrsatz?

$$(x+y)^n = \sum_{①}^{②} \binom{n}{k} x^{③}\, y^{④}$$

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Schreiben Sie für $n = 5$ den Binomischen Lehrsatz an, führen Sie die Summation explizit durch (d.h. ohne $\sum$-Symbol) und berechnen Sie insbesondere die dabei auftretenden Binomialkoeffizienten!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz (C), um für passend gewähltes $x = \ldots\ldots$ und $y = \ldots\ldots$ die Potenz 99^5 explizit und ohne Taschenrechner zu berechnen!

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Das **Sandwich-Theorem** erlaubt es, von der Konvergenz zweier Folgen a_n und b_n mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ (für alle bis auf endliche viele $n \in \mathbb{N}$) auf die Konvergenz der Folge x_n zu schließen. Was muss dabei für die Grenzwerte $\lim a_n$ und $\lim b_n$ gelten, damit das möglich ist?

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie das Sandwich-Theorem aus Teil A und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, um den Grenzwert der unendlichen Folge $x_n = \sqrt[n]{1 + \cos n + n}$ zu berechnen. Geben Sie dazu a_n und b_n wie in Teil A gefordert an!

$a_n =$ ________________, $b_n =$ ________________, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ________________

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil C) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{3^n}$ auf Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz ein Intervall $[a, b]$ an, von dem Sie argumentieren können, dass es den Grenzwert enthält und das Länge höchstens $L = b - a \leq 0.001$ hat. Hinweis: $3^{-8} < 0.001$.

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to W$ mit $f(x) = \dfrac{5x+2}{2x+1}$. Wie muss man W wählen, damit f surjektiv ist?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to W$ aus Teil (A) umkehrbar? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion (inkl. deren Defintions- und Wertebereich) an; wenn nein, argumentieren Sie, warum eine Umkehrfunktion nicht existiert.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Was bedeutet es für eine reelle Funktion „streng monoton wachsend" zu sein? Geben Sie eine exakte Definition.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Ist gemäß Ihrer Definition aus Teil (C) die Funktion f aus Teil (A) streng monoton wachsend? Wenn ja, rechnen Sie nach, dass die Definition auch tatsächlich erfüllt ist, wenn nein, bringen Sie ein explizites Gegenbeispiel.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil E) Die Funktion f aus Teil (A) ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Wieso?

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil F) Die Funktion f aus Teil (A) besitzt weder Minimum, noch Maximum. Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz vom Maximum für stetige Funktionen?

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

In dieser Aufgabe geht es um die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Wie muss man $f(0)$ definieren, damit f zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion wird?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Ist die stetig fortgesetzte Funktion aus Teil (A) an $x_0 = 0$ differenzierbar? Wenn ja: Wie lautet $f'(0)$? Wenn nein: Warum ist f an $x_0 = 0$ nicht differnenzierbar?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl das Taylorpolynom $T_{0,3}(x)$ von f, d.h. mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und Grad 3.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Argumentieren Sie, dass die Funktion f zumindest auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng montoton und daher umkehrbar ist.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Ist die Umkehrfunktion $f^{(-1)}(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar? Wenn ja: Wie lautet $f^{(-1)}(0)$? Wenn nein: Warum ist $f^{(-1)}(x)$ an $x_0 = 1$ nicht differnenzierbar?

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Geben Sie mit Hilfe von F eine Stammfunktion von $f(x)g(x)$ an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil B) Bestimmen Sie unter Verwendung von Teil A eine Stammfunktion von $x \mapsto \cos^2 x$.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Geben Sie eine geometrische Interpretation des Integrals

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

an und berechnen Sie dessen Wert.

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil D) Berechnen Sie die Untersumme $U(f;\mathcal{Z})$ und die Obersumme $O(f;\mathcal{Z})$ für die Funktion $f(x) = \cos^2 x$ und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ des Intervalls $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.