Übungen zu Analysis 3, 11. Übung

1. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder $Z_1 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z_2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$. Bestimmen Sie ∂G, $\partial^s G$ und die Oberfläche von $\partial^s G$!

2. Sei $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei F die Teilmenge aller Punkte x der Kugeloberfläche S^2, die $x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tan\psi$ erfüllen (Kugelkalotte). Skizziere F und berechne die Oberfläche von F.

   Hinweis: Verwende Kugelkoordinaten.

3. Man berechne
$$\int_F x_1 \, \mathrm{d}\mu(x_1, x_2, x_3)^T ,$$
   wobei F das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ im $\mathbb{R}^3$ ist. F ist dabei als Teilmenge der Mannigfaltigkeit M mit Oberflächenmaß μ zu betrachten, wobei M die affine Ebene ist, die durch diese drei Punkte geht.

4. Ist B eine messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und μ das Oberflächenmaß auf M, so berechnet sich der Schwerpunkt $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ vom homogen mit Masse belegten B durch
$$x_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x \, \mathrm{d}\mu(x,y,z)^T, \quad y_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y \, \mathrm{d}\mu(x,y,z)^T,$$
$$z_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z \, \mathrm{d}\mu(x,y,z)^T .$$
   Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B = M$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Graph der Abbildung $f : (0,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2)^T = x_1^2 + x_2$ ist.

5. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B \subseteq M$, wobei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}$ und $B = \phi(R)$, wobei $\phi(s,t)^T = (0,0,1)^T + s(1,0,-1)^T + t(0,1,-1)^T$ und R die Fläche ist, die von der x-Achse und einem vollen Bogen ($t \in [0, 2\pi]$) der Zykloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, begrenzt wird.

6. Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g \in C^1(G, \mathbb{C})$ über G nach λ_2 integrierbar. Zeigen Sie, dass
$$f(w) := \frac{1}{\pi} \int_G \frac{1}{w - z} g(z) \, \mathrm{d}\lambda_2(z), \quad w \in G ,$$
   eine wohldefinierte, stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ abgibt, die $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ erfüllt und dass für jedes weitere $h \in C^1(G, \mathbb{C})$ mit $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = g$ die Differenz $f - h$ holomorph ist.

   Hinweis: Man denke sich g mit Null zu einer auf $\mathbb{C}$ definierten Funktion fortgesetzt. Um $U_\delta^{\mathbb{C}}(a) \subseteq D(g)$ und $f|_{U_\delta^{\mathbb{C}}(a)} \in C^1(U_\delta^{\mathbb{C}}(a), \mathbb{C})$ samt $\frac{\partial f|_{U_\delta^{\mathbb{C}}(a)}}{\partial \bar{z}} = g|_{U_\delta^{\mathbb{C}}(a)}$ für $K_{2\delta}^{\mathbb{C}}(a) \subseteq G$ zu zeigen, schreibe man $g = k_\delta(. - a) \cdot g + (1 - k_\delta(. - a)) \cdot g$, wende auf $k_\delta(. - a) \cdot g$ die Übungsaufgaben fünf und sechs der 10. Übung sowie auf $(1 - k_\delta(. - a)) \cdot g$ die letzte Übungsaufgabe der neunten Übung an.

7. Beweisen Sie, dass für das Oberflächenmaß μ auf $S^{p-1} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$ und für jede orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{p\times P}$

$$\mu(T(A)) = \mu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}\,.$$

8. Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$, μ das Oberflächenmaß darauf, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ fest, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_{S^n} f((x,y))\, d\mu(y) = \int_{S^n} f(\|x\|_2 \cdot y_{n+1})\, \mathrm{d}\mu(y)\,,$$

wobei (x, y) das Skalarprodukt von x und y ist. Schließlich zeige man mit Hilfe von Beispiel 15.7.11, dass dieses Integral mit

$$d_{n-1} \int_{-1}^{1} f(\|x\|_2 \cdot t)\, (1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}\, \mathrm{d}t$$

übereinstimmt, wobei d_{n-1} das gesamte Oberflächenmaß von S^{n-1} ist.