Übungen zu Analysis 3, 10. Übung

1. Zeigen Sie, dass $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \mapsto \log z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ über jede beschränkte Teilmenge $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach λ_2 integrierbar sind. Dabei sei festgelegt, dass $\log(re^{i\phi}) = \ln r + i\phi$ mit $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.

   Weiters berechne man
$$\int_{K_\rho(0)\setminus\{0\}} \frac{1}{x + iy} \, d\lambda_2(x, y)^T$$
   und
$$\int_{U_\rho(0)^+\setminus\{0\}} \log(x + iy) \, d\lambda_2(x, y)^T,$$
   wobei $\rho > 0$ und $U_\rho(0)^+ = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 < \rho^2, y > 0\}$.

2. Seien $a, b, c, d \in (0, +\infty)$ mit $a < b < c < d$. Berechnen die Fläche der Menge $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \exp(y) \leq b,\ c \leq x \exp(-y) \leq d\}$.

3. Für $t > 0$ setze
$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos x^2 \, dx, \quad G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x^2 \, dx\,.$$
   Man zeige $F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{t}{1+t^2} = 2tF(t)G(t)$. Begründung!

   Hinweis: Zur Berechnung von $F(t)^2, G(t)^2, F(t)G(t)$ schreiben Sie die beiden Faktoren als Integrale mit verschiedenen Integrationsvariabeln!

4. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $B : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass B genau dann ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, wenn B injektiv ist und $B'(z) \neq 0$, $z \in D$, erfüllt. In diesem Fall zeige man, dass $|\det dB(z)|$ mit $|B'(z)|^2$ übereinstimmt.

   Schließlich zeige man, dass für ein weiteres holomorphes $f : O \to \mathbb{C}$ mit offenem $O \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $B(D) \subseteq O$, und $g := f \circ B$
$$\int_D |g'(x + iy)|^2 \, d\lambda_2(x, y)^T = \int_{B(D)} |f'(\xi + i\eta)|^2 \, d\lambda_2(\xi, \eta)^T\,.$$

5. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der neunten Übung zeige man, dass im Fall $g \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cap C_{00}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ immer $D(g) = \mathbb{C}$ und $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ sowie dass im Fall $g \in C^k(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cap C_{00}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit $k \in \mathbb{N}$ sogar $f \in C^k(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, wobei für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $m + n \leq k$ und $w = x + iy$, $z = \xi + i\eta$
$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{w - z} \frac{\partial^{m+n} g}{\partial \xi^m \partial \eta^n}(z) \, d\lambda_2(z)\,.$$
   Hinweis: Substituieren Sie in der Definition von $f(w)$ die Integrationsvariable z durch $z + w$.

6. Sei $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cap C_{00}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, also ist f komplexwertig, stetig differenzierbar und nimmt den Wert Null außerhalb einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ an. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x + iy)\right).$$

Zeigen Sie, dass $z \mapsto \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ über $\mathbb{C}$ nach λ_2 integrierbar ist, und dass

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda_2(z) = -\pi f(0)$$

und

$$f(w) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{w-z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda_2(z), \quad w \in \mathbb{C}\,.$$

Hinweis: Ist $\psi : [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\psi(r,\alpha)^T = r(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ und $g = f \circ \psi$, so zeige man, dass das zu behandelnde Integral mit

$$\frac{1}{2}\int_{[0,+\infty)}\int_{(-\pi,\pi)} \left(\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)(r,\alpha)^T\,\mathrm{d}\lambda_2(r,\alpha)^T$$

übereinstimmt.

7. Man zeige (i) bis (iii).

   (i) Für alle $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

   $$\nu(B) = \nu(s\cdot B) \;\text{ und }\; \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(t)\,\mathrm{d}\nu(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(s\cdot t)\,\mathrm{d}\nu(t),$$

   wobei das Maß $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ definiert ist durch $\nu(B) := \int_B \frac{1}{|t|}\,\mathrm{d}\lambda(t)$.

   (ii) Für alle $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt

   $$\sigma(B) = \sigma(w\cdot B) \;\text{ und }\; \int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} f(z)\,\mathrm{d}\sigma(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} f(z\cdot w)\,\mathrm{d}\sigma(z),$$

   wobei das Maß $\sigma : \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ definiert ist durch $\sigma(B) := \int_B \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{d}\lambda_2(z)$.

   (iii) Ist M ein d-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^p$ versehen mit dem Oberflächenmaß μ, so gilt für alle $y \in M$

   $$\mu(B) = \mu(y+B) \;\text{ und }\; \int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_M f(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

   Die Funktionen f sind dabei reell- bzw. komplexwertig und messbar. Die Gleichheiten der Integrale sind so zu verstehen, dass die linke Seite existiert genau dann, wenn es die rechte tut.

   Anmerkung: $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, .), (\mathbb{C}\setminus\{0\}, .), (M, +)$ sind Gruppen. Die oben betrachteten Maße sind translationsinvariant in den jeweiligen Gruppen. Man spricht vom sogenannten Haarschen Maß.

8. Skizzieren Sie die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

   $$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + z^2 = a^2\,,$$

   und berechnen Sie das Oberflächenmaß der durch $x, y, z \geq 0$ festgelegten Teilmenge von M.