Übungen zu Analysis 3, 9. Übung

1. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini und den Satz von der beschränkten Konvergenz für komplexwertige Funktion. Dabei können Sie die Richtigkeit dieser beiden Sätze für reellwertige Funktionen annehmen.

2. Beweisen Sie, dass $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z = r\exp(i\phi) \mapsto \ln r + i\phi$ $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$-messbar ist, wenn man etwa festlegt, dass der Winkel ϕ aus $[0, 2\pi)$ ist.

3. Man betrachte
$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx \,.$$
Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert dieses Integral als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

   Bezeichnet I die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ so, dass obiges Integral als Lebesgue-Integral existiert, so berechne man $f'(t)$ explizit für $t \in I$! Man leite daraus $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ für $t \in (0, +\infty)$ her.

4. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel bestimme man das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$!

   Hinweis: Schreiben Sie $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ und auch $f(t)$ als Summe der uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_0^1 \cdots + \int_1^{+\infty} \ldots$, wenden Sie auf das zweite Integral partielle Integration an, sodass ein absolut uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion Integrand ist. Bilden Sie schließlich $\lim_{t \to 0+} f(t)$!

5. Man verwende den Satz von der monotonen Konvergenz, um für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$
$$I(t) := \int_{(0,+\infty)} e^{-t^2 x} \frac{e^{2tx} - e^{-2tx}}{e^x - e^{-x}} \, d\lambda(x) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1 + t^2)^2 - 4t^2}$$
zu zeigen. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz angewandt auf das Zählmaß, dass $\lim_{t \to 1} I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2} = \frac{3}{4}$.

   Hinweis: Geometrische Reihe.

6. Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{\cos xt}{1 + t^2} \, d\lambda(t), \quad G(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1 - \cos xt}{t^2(1 + t^2)} \, d\lambda(t) \,.$$
Man zeige, dass F und G stetig sind, dass $F(0) - F(x) + G(x) = |x| \cdot \int_{(0,+\infty)} \frac{(\sin t)^2}{t^2} \, d\lambda(t)$ und dass G zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $G'' = F$ ist.

7. Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathbb{T}_2)_{\mathbb{T}} \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß, wobei $\mathbb{T}$ $(= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$. Zeigen Sie, dass durch $(z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$
$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta)$$
eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion definiert wird. Zeigen Sie weiters, dass $\mathrm{Re} \, \frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}$ und infolge $\mathrm{Re} \, f(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

8. Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar und bezeichne $D(g)$ die Menge aller $w \in \mathbb{C}$ derart, dass $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \ni (r, t)^T \mapsto g(w + r\exp(it)) \in \mathbb{C}$ nach λ_2 integrierbar ist. Zeigen Sie, dass $w \in D(g)$ zur Integrierbarkeit nach λ_2 der Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{w-z} g(z) \in \mathbb{C}$ äquivalent ist, und damit durch

$$f(w) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{w-z} g(z) \, d\lambda_2(z), \quad w \in D(g),$$

eine Funktion $f : D(g) \to \mathbb{C}$ wohldefiniert ist.

Zeigen Sie weiters, dass im Fall eines nach λ_2 über $\mathbb{C}$ integrierbaren g mit $g|_{U_r^{\mathbb{C}}(a)} \equiv 0$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ immer $U_r^{\mathbb{C}}(a) \subseteq D(g)$, wobei $f|_{U_r^{\mathbb{C}}(a)}$ holomorph ist.

Schließlich zeigen man, dass aus $\sup_{z \in \mathbb{C}} |g(z)| < +\infty$ und $g|_{\mathbb{C} \setminus K_\rho(0)} \equiv 0$ mit einem gewissen $\rho > 0$ für ein messbares $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ immer $D(g) = \mathbb{C}$ folgt.