Übungen zu Analysis 3, 8. Übung

1. Sei $K = \{(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ und $A = \{(\xi,\eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man bestimme $x \in K, y \in A$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel (!!) so, dass $d(x,y) = d(A,K)$. Man zeige auch, dass x normal auf die Gerade A steht.

2. Seien $a,b,c > 0$ und $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das Maximum der Volumina von in K enthaltenen Quadern mit achsenparallelen Kanten.

3. Seien $x_1,\dots,x_n$ Winkeln mit $x_j \in (0,2\pi)$, so dass $x_1 + \cdots + x_n = 2\pi$. Setzen wir $P_j = \exp(\mathrm{i}\sum_{l=1}^{j-1} x_l)$, $j = 1,\dots,n$, so stellt $\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_{n-1}P_n},\overrightarrow{P_nP_1}$ ein n-Eck in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dar.

   Man bestimme die Winkel x_j derart, dass der Flächeninhalt dieses n-Eckes maximal ist. Man verwende dabei die Lagrangesche Multiplikatorenregel.

4. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $dF(x) \neq 0$ für alle $x \in M := \{y \in O : F(y) = 0\}$.

   Gibt es auf M eine überall definierte, stetige Normalenfunktion? Zeigen Sie anschließend, dass $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ sind.

   Zeigen Sie weiters, dass es für $x \in M$ beliebig nahe an x Punkte aus $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und Punkte aus $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ gibt, also dass x im Abschluss von G und von H ist.

   Schließlich zeige man, dass $\partial G \cap O = M$ und $\partial^s G \cap O = \partial^o G \cap O = M$.

   Hinweis: Was würde etwa aus $U_\epsilon^{\mathbb{R}^p}(x) \subseteq \{x \in O : F(x) \leq 0\}$ mit $F(x) = 0$ für $dF(x)$ folgen?

5. Mit Hilfe das Satzes von Fubini und der Tatsache, dass $\lambda_p(B) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_B \, d\lambda_p$, wie in (14.55) bestimme man das Volumen (das λ_3-Maß) der offenen Menge

$$G := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4,\ 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$$

   und gebe ∂G, $\partial^s G$ und $\partial^o G$ an!

6. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder $Z_1 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z_2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$. Bestimmen Sie den Rand ∂G, $\partial^s G$ und $\partial^o G$ sowie das Volumen $\lambda_3(G)$! Skizze!

7. Für $n,m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^n)$ und messbares $f : D \to \mathbb{R}^m$ zeige man $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^{m+n})$ und $\lambda_{m+n}(\Gamma(f)) = 0$.

8. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ aller messbaren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$ versehen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bildet und dass die durch $\|f\|_1 := \int_\Omega |f| \, d\mu$ definierte Abbildung eine Seminorm bildet. Eine Seminorm hat abgesehen von der Forderung, dass $\|f\|_1 = 0$ die Gleichheit $f = 0$ nach sich zieht, dieselben Eigenschaften wie eine Norm zu erfüllen.

   Weiter zeige man im Detail, dass $\left|\int_\Omega f \, d\mu\right| \leq \|f\|_1$ für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$.