Übungen zu Analysis 3, 7. Übung

1. Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn $M \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{p+n}$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass wenn N eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist, es zu jedem $x \in N$ eine Karte φ der Menge M gibt, die auch eine Karte der Menge N ist.

3. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ und $x \in M$. Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Kurve $\alpha : [-1, +1] \to \mathbb{R}^p$ mit $\alpha([-1, +1]) \subseteq M$ und $\alpha(0) = x$ der Tangentialvektor $\alpha'(0)$ im Tangentialraum T_x von M an der Stelle x liegt.

   Kann man jeden Vektor aus T_x als $\alpha'(0)$ für eine gewisse derartige Abbildung schreiben? Wenn ja warum?

4. Sei $f(x, y)^T = \sqrt{y - x}$ definiert auf $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ und setze
$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} .$$
   Bestimmen Sie den Tangentialraum und die beiden Normalvektoren an den Punkten $(x, y, z)^T = (2, 6, f(2, 6)^T)^T$, $(x, y, z)^T = (-2, 0, f(-2, 0)^T)^T$ sowie $(x, y, z)^T = (-\frac{1}{2}, 1, f(-\frac{1}{2}, 1)^T)^T$ aus M. Fertigen Sie auch eine Skizze an!

5. Konstruieren Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel einen Kegel mit Höhe h und Grundkreisradius r maximalen Volumens einmal bei vorgegebener Oberfläche ohne Boden und einmal bei vorgegebener Gesamtoberfläche. Geben Sie jeweils das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius an.

   Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für die Kegeloberfläche aus der Schule und maximieren Sie das Quadrat des Volumens!

6. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel alle Punkte der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung
$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$$
   definiert ist, welche vom Ursprung kleinsten Abstand haben.

7. Wo besitzt die Funktion $f : (0, +\infty)^n \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x_1, \dots, x_n)^T = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$$
   ein lokales bzw. globales Extremum unter der Nebenbedingung $x_1 \dots x_n = a^n$ mit einem festen $a > 0$. Man verwende die Lagrangesche Multiplikatorenregel.

8. Betrachte die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$\phi((t, \alpha)^T) := \Big((1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \alpha, (1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \sin \alpha, t \sin \frac{\alpha}{2}\Big)^T ,$$
   und setze $M := \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für jedes Intervall (a, b) mit $b - a \leq 2\pi$ die Einschränkung $\phi|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a,b)}$ eine Einbettung in M abgibt, und dass

die Menge M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, welche man Möbiusband nennt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\times[0, 2\pi])\setminus\phi(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}\times[0, 2\pi])$ offen in $\phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\times[0, 2\pi])$ ist. Anschließend weise man nach, dass für $|b-a| < 2\pi$ die Abbildung $\phi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b] \to \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b])$ ein Homöomorphismus ist, und damit dann dass auch $\phi : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b) \to \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ ein Homöomorphismus mit einer in M offenen Menge $\phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ ist.