Übungen zu Analysis 3, 6. Übung

1. Sei $O = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0,\ x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2}\}$ und $P = (0,1) \times (0,1)\,(\subseteq \mathbb{R}^2)$. Weiters sei $T : O \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin x_1}{\cos x_2} \\ \frac{\sin x_2}{\cos x_1} \end{pmatrix}.$$

   Man zeige, dass T ein Diffeomorphismus mit Bildbereich P ist, und berechne $\det dT((x_1, x_2)^T)$.

2. Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist.

   Man zeige auch, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, für die $M := \{z \in G : \operatorname{Re} f(z) = c\}$ nichtleer ist, M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ abgibt.

   Hinweis: Wie hängen $f'(z) \in \mathbb{C}$ und $df(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zusammen?

3. Man gebe für die folgenden zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jeweils eine möglichst große, offene Teilmenge C von $\mathbb{R}^2$ derart an, dass $f|_C$ und $g|_C$ einen Diffeomorphismus abgeben. Man gebe zu jedem solchen C auch die Bildmenge D an.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

   Weiters gebe man $df(x)$ und $dg(x)$ sowie $\det df(x)$ und $\det dg(x)$ an.

   Hinweis: Um welche bekannte Funktionen handelt es sich bei f und g, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert?

4. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Affensattel, also die Menge aller $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit

$$3z + 3xy^2 - x^3 = 0\,.$$

   Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie ihre Dimension!

5. Für $0 < d < p$ und ein offenes $C \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f : C \to \mathbb{R}^{p-d}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Graph $M := \{(x^T, f(x)^T)^T \in \mathbb{R}^p : x \in C\}$ von f als Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ eine implizit definierte Mannigfaltigkeit ist. Geben Sie die Dimension dieser Mannigfaltigkeit und die definierende Implizite Funktion samt offenem Definitionsbereich an!

6. Ist $T : O \to P$ ein Diffeomorphismus mit offenen Teilmengen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$ und ist M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ mit $M \cap O \neq \emptyset$, so zeige man, dass auch $T(M \cap O)$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

7. Ist $M_i, i \in I$, eine Familie von d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$ derart, dass für jedes $j \in I$, $M_j \cap c\ell(\bigcup_{i \neq j} M_i) = \emptyset$, so zeige man, dass auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine Mannigfaltigkeit von Dimension d ist.

8. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen, der vermöge der Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

mit dem $\mathbb{R}^4$ identifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass dann

$$O(2) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T \text{ ist eine orthogonale Matrix} \right\}$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ eine Mannigfaltigkeit von Dimension $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ abgibt. Was ist das richtige d? Schließlich gebe an, ob $O(2)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ ist, und begründe dies!

Hinweis: Für das letzte Problem betrachten sie $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$. Welche Werte kann $\det$ auf $O(2)$ annehmen?