Übungen zu Analysis 3, 5. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie in dieser allgemeinen Situation, dass $C_0(X, \mathbb{R})$ $(C_0(X, \mathbb{C}))$ ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{R})$ $(C_b(X, \mathbb{C}))$ ist. Zeigen Sie weiters, dass diese Räume übereinstimmen, wenn $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Man zeige, dass dann jedes $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, falls Y offen oder abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist.

   Des Weiteren sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Unterhalbgruppe bzgl. $+$, also $n, m \in M \Rightarrow m + n \in M$. Ist dann die lineare Hülle aller Funktionen $[0, +\infty) \ni x \mapsto \exp(-nx)$, $n \in M$, dicht in $C_0([0, +\infty), \mathbb{R})$? Begründung!

3. Für $\epsilon > 0$, $0 < a \leq 1 - \epsilon$ und $M = [0, 1 - \epsilon]$ zeige man dass die Abbildung $T : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $T(x) = \frac{a+x^2}{2}$ eine strikte Kontraktion ist, wobei $T(M) \subseteq M$. Was erhält man für eine Aussage mit dem Banachschen Fixpunktsatz angewandt auf diese Abbildung T?

4. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$g(x) = x \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4} \sin(x)$$
   das Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ in sich abbildet, und dass $g : I \to I$ genau einen Fixpunkt in I hat.

   Hinweis: $g(x) - g(y) = \int_y^x g'(t)\, dt$.

5. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$, $y \in \mathbb{R}^p$ und $A : I \to \mathbb{R}^{p \times p}$ eine stetige Abbildung mit $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie unter der Zusatzbedingung $\int_a^b \|A(t)\|\, dt < 1$, dass es eine eindeutige differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}^p$ gibt, welche das Anfangswertproblem $f(a) = y$, $f'(t) = A(t)f(t)$, $t \in I$, löst.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(a) = y$ und $f'(t) = A(t)f(t)$, $t \in I$, für differenzierbares f äquivalent zu $f(x) = y + \int_a^x A(t)f(t)\, dt$, $x \in I$, für stetiges f ist. Finden Sie einen vollständig metrischen Raum und eine strikte Kontraktion darauf, deren Fixpunkt dieser Integralgleichung entspricht!

   Anmerkung: Wenn man die Metrik in dem betrachten vollständig metrischen Raum geeignet abändert, dann zeigt sich, dass auch ohne der Bedingung $\int_a^b \|A(t)\|\, dt < 1$ das Anfangswertproblem $f(a) = y$, $f'(t) = A(t)f(t)$, $t \in I$, eine eindeutige Lösung hat.

6. Für $F(x, y, z)^T = x^4 + 2x \cos y + \sin z$ mit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ zeige man mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen, dass für hinreichend kleines ϵ auf $\{(x, y, z)^T : |x|, |y|, |z| < \epsilon\}$ die Gleichung $F(x, y, z)^T = 0$ als Graph einer Funktion $z((x, y)^T)$ geschrieben werden kann. Man berechne die Lösungsfunktion $z((x, y)^T)$ und die Ableitung $dz((x, y)^T)$ auf direkte Weise und mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen.

7. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F((x,y,z)^T) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \\ xy - 1 \end{pmatrix} .$$

Für welche $(a,b,c)^T$ kann die Lösungsmenge von $F((x,y,z)^T) = 0$ lokal als Graph einer Funktion $(y(x), z(x))^T$ geschrieben werden, sind also die dem Satz über implizit definierte Funktionen entsprechenden Bedingungen erfüllt?

8. Man betrachte die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)^T = b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n .$$

Man wende den Satz über implizit definierte Funktionen an, um folgendes zu zeigen:

Hat das Polynom $a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ genau n verschiedene Nullstellen, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass wenn $|a_0 - b_0| < \delta, \ldots, |a_{n-1} - b_{n-1}| < \delta$ das Polynom $b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$ auch n verschiedene Nullstellen hat, wobei diese Nullstellen stetig differenzierbar von $(b_0, \ldots, b_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ abhängen.