Übungen zu Analysis 3, 4. Übung

1. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Weiters sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[0,1]$, also $0 = \xi_0 < \dots < \xi_{n(\mathcal{Z})} = 1$, definieren wir $h_\mathcal{Z} : [0,1] \to \mathbb{R}$ induktiv durch ($j = 0, \dots, n(\mathcal{Z}) - 1$)

$$h_\mathcal{Z}(t) := y_j + (t - \xi_j) f(\xi_j, y_j) \quad \text{für} \quad t \in [\xi_j, \xi_{j+1}],$$

und $y_{j+1} := h_\mathcal{Z}(\xi_{j+1})$. Skizzieren Sie $h_\mathcal{Z}$!

Zeigen Sie, dass für $t \in [0,1]$

$$h_\mathcal{Z}(t) = y_0 + \int_0^t g_\mathcal{Z}(s)\, ds,$$

wobei $g_\mathcal{Z}(s) = f(\xi_j, y_j)$ für $s \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$ und $g_\mathcal{Z}(0) = f(\xi_0, y_0)$. Zeigen Sie auch, dass die Menge $\{h_\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}\}$ von Funktionen gleichgradig stetig ist und dass $\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \|h_\mathcal{Z}\|_\infty < +\infty$.

2. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei $\mathcal{Z}_m, m \in \mathbb{N}$, eine Folge von Zerlegungen von $[0,1]$ mit $|\mathcal{Z}_m| \to 0$ für $m \to \infty$, wobei $|\mathcal{Z}| := \max_{j=1,\dots,n(\mathcal{Z})} |\xi_j - \xi_{j-1}|$. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $f|_{[0,1]\times[-N,N]}$ mit N hinreichend groß, dass

$$\lim_{m \to \infty} (g_{\mathcal{Z}_m}(s) - f(s, h_{\mathcal{Z}_m}(s))) = 0$$

und zwar gleichmäßig auf $[0,1]$. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von Ascoli die Existenz eines stetigen $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = y_0 + \int_0^t f(s, h(s))\, ds \quad \text{für} \quad t \in [0,1].$$

Anmerkung: Differenzieren nach t zeigt, dass h die Lösung der Differentialgleichung $h'(x) = f(x, h(x))$ mit Anfangsbedingung $h(0) = y_0$ ist. Wir haben somit eine elementare Version des Satzes von Peano über die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen gezeigt.

3. Sei $\mathbb{D}$ der offene in Einheitskreis $U_1^\mathbb{C}(0)$ und $c\ell(\mathbb{D})$ der abgeschlossene Einheitskreis $K_1^\mathbb{C}(0)$ um die Null in $\mathbb{C}$ bzgl. $|.|$.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ aller Funktionen $f : c\ell(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ von Polynombauart $f(z) = \sum_{j=0}^N a_j z^j$ eine Algebra in $C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ abgibt. Zeigen Sie auch, dass diese Algebra nicht dicht in $C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ ist. Welche Voraussetzung vom Satz von Stone-Weierstrass für Algebren komplexwertiger Funktionen ist nicht erfüllt?

Hinweis: Für das Faktum, dass $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ nicht dicht ist, untersuche man einen gleichmäßigen Grenzwert $f \in C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ punkto Holomorphie auf $\mathbb{D}$!

4. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$ der Bauart $f(z) = \sum_{j,k=0}^N a_{j,k} z^j \bar{z}^k$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_{j,k} \in \mathbb{C}$, dicht in $C_b(K, \mathbb{C})$ ist.

5. Seien X, Y zwei kompakte topologische Räume, und seien $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B} \subseteq C(Y, \mathbb{R})$ zwei punktetrennende und nirgends verschwindende Algebren. Zeigen Sie, dass dann die Menge aller Funktionen der Bauart

$$(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y)$$

mit $f_j \in \mathcal{A}$ und $g_j \in \mathcal{B}$ dicht in $C(X \times Y, \mathbb{R})$ ist.

Zeigen Sie damit, dass die Menge aller reellen Polynome $\mathbb{R}[x, y]$ in zwei Variablen betrachtet als Funktionen auf einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ dicht in $C([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ ist.

6. Mit der Notation aus dem Satz über die Alexandroff Kompaktifizierung führe man mit Hilfe dr Resultate über kompakte Mengen genau aus, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf Y ist.

7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $(Y, \mathcal{O})$ seine Alexandroff Kompaktifizierung. Ist $(Z, \mathcal{W})$ ein kompakter Hausdorff-Raum, $R \subseteq Z$ eine offene Teilmenge und $h : (R, \mathcal{W}_R) \to (X, \mathcal{T})$ ein Homöomorphismus, so zeige man, dass die Funktion $f : Z \to Y$ definiert durch $f(x) = h(x)$ für $x \in R$ und $f(z) = \infty$ für $z \in Z \setminus R$ stetig ist. Falls dabei $Z \setminus R$ einpunktig ist, so zeige man weiters, dass f auch ein Homöomorphismus ist.

   Anmerkung: Für $h : (0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{T} : z \neq 1\}$ mit $h(t) = \exp(it)$ zeigt dieses Übungsbeispiel, dass die Einpunktkompaktifizierung von $(0, 2\pi)$ zu $\mathbb{T}$ homöomorph ist.

8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass $I := \{(x, K) : x \in X \setminus K, \ K \text{ ist kompakte Teilmenge von } X\}$ mit $(x_1, K_1) \preceq (x_2, K_2) :\Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ zu einer gerichteten Menge wird. Zeigen Sie für eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ auch, dass

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists K \text{ kompakt } \forall x \in X \setminus K : \ |g(x)| < \epsilon$$

genau dann, wenn $\lim_{(x,K) \in I} g(x) = 0$.