Übungen zu Analysis 3, 3. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $Y \subseteq X$. Man zeige, dass für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ die Kompaktheit von $c\ell_{\mathcal{T}_Y}(B)$ dazu äquivalent ist, dass $c\ell_{\mathcal{T}}(B)$ kompakt und in Y enthalten ist. Man zeige schließlich, dass in diesem Fall $c\ell_{\mathcal{T}_Y}(B) = c\ell_{\mathcal{T}}(B)$.

2. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakte topologische Räume. Man zeige ohne dem Satz von Tychonoff, dass $X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist!

   Hinweis: Verwenden Sie die Charakterisierung der Kompaktheit mittels Netze!

3. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe versehen mit einer Topologie derart, dass $(g, h) \mapsto gh$ als Abbildung von $G \times G$, versehen mit der Produkttopologie, nach G und $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildung von G nach G stetig sind. Weiters seien M_1, M_2 Teilmengen von G.

   Weisen Sie nach, dass für $x, y \in G$, eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und Netze $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ in G über dieser gerichteten Menge mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$ immer $x_i y_i \to xy$ gilt.

   Weiters zeige man, dass wenn M_1 und M_2 kompakt sind, dann auch $M_1 \cdot M_2$ eine kompakte Teilmenge von G ist.

4. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass $M_1 \cdot M_2$ abgeschlossen ist, wenn eine der beiden Mengen abgeschlossen und die andere kompakt ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass z im Abschluss von $M_1 \cdot M_2$ ist, und betrachten Sie ein Netz, dass aus $M_1 \cdot M_2$ heraus gegen z konvergiert!

   Anmerkung: $M_1 \cdot M_2$ ist am Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn man nur fordert, dass M_1 und M_2 abgeschlossen sind. Beispielsweise sind in der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Die Menge $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$ und damit nicht abgeschlossen.

5. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $O \subseteq X$ offen und nichtleer. Zeigen Sie, dass mit $d(x, M) := \inf_{m \in M} d(x, m)$ (verwenden Sie die Erkenntnisse aus Abschnitt 12.14)
   $$d_O(x, y) := d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)} \right|$$
   eine Metrik auf O abgibt, wobei $\mathcal{T}(d_O) = \mathcal{T}(d)_O$ auf O.

6. Sei $\langle X, d \rangle$ ein vollständig metrischer Raum und $O \subseteq X$ offen und nichtleer. Mit der Notation aus dem vorherigen Übungsaufgabe zeige man, dass auch $\langle O, d_O \rangle$ ein vollständig metrischer Raum ist.

7. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G} = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = 0, \|f'\|_\infty \leq 1\}$ als Teilmenge von $C([0, 1], \mathbb{R})$ relativ kompakt ist, also dass $c\ell(\mathcal{G})$ kompakt ist.

8. Man gebe samt Begründung an, ob $\mathcal{G} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ total beschränkt ist, wobei

   (i) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$

(iii) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) $K = [0, 2]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$