Übungen zu Analysis 3, 2. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $D \subseteq X$ und $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ dicht. Zeigen Sie, dass D genau dann dicht in X ist, wenn $D \cap O \neq \emptyset$ für alle $O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Weiters zeige man, dass $O_1 \cap \dots \cap O_n$ offen und dicht ist.

2. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, $(y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und $j \in I$. Zeigen Sie, dass $(X_j, \mathcal{T}_j)$ homöomorph ist zu
$$X_j((y_i)_{i \in I}) = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = y_i \text{ für alle } i \neq j\}.$$
Dabei ist $X_j((y_i)_{i \in I})$ versehen mit der Spurtopologie als Teilmenge von $\prod_{i \in I} X_i$, und $\prod_{i \in I} X_i$ ist mit der Produkttopologie versehen.

3. Für $i \in I (\neq \emptyset)$ seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $x = (x_i)_{i \in I} \in X := \prod_{i \in I} X_i$ und B_i Teilmenge von X_i fü+r alle $i \in I$.

   Man zeige, dass die Menge aller Teilmengen $\prod_{i \in I} U_i$ von X mit Umgebungen U_i von x_i für alle $i \in I$ so, dass $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$ endlich ist, eine Umgebungsbasis von x, also eine Filterbasis des Umgebungsfilters um x bezüglich der Produkttopologie abgibt.

   Man zeige weiters, dass der Abschluss von $\prod_{i \in I} B_i$ in $\prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Produkttopologie mit $\prod_{i \in I} c\ell_{\mathcal{T}_i}(B_i)$ übereinstimmt.

4. Für $i \in I (\neq \emptyset)$ seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass X das Axiom (T2), wenn alle $(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Axiom (T2) erfüllen. Denselben Schluss führe man für das Axiom (T3) durch!

5. Man zeige, dass ein topologischer Raum genau dann das Axiom (T1) erfüllt, wenn alle endlichen Teilmengen davon abgeschlossen sind.

6. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie aus der zweiten Übungsaufgabe der ersten Übung. Man spricht von dercofiniten Topologie auf der Menge X. Ist die cofinite Topologie Hausdorffsch? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T3)? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T4)? Begründungen!

7. Seien $\langle X_n, d_n \rangle$, $n \in \{1, \dots, N\}$, mit $N \in \mathbb{N}$ metrische Räume. Definiere $\chi_1, \chi_2, \chi_\infty : \left(\prod_{n \in \{1,\dots,N\}} X_n\right)^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$\chi_1(f, g) := \sum_{n=1}^{N} d_n(f_n, g_n), \ \chi_2(f, g) := \sqrt{\sum_{n=1}^{N} d_n(f_n, g_n)^2},$$
$$\chi_\infty(f, g) := \max_{n=1,\dots,N} d_n(f_n, g_n),$$
wobei $f = (f_n)_{n=1}^N, g = (g_n)_{n=1}^N \in \prod_{n \in \{1,\dots,N\}} X_n$.

   Zeige, dass diese drei Abbildungen alle Metriken sind und dass die drei Topologien $\mathcal{T}(\chi_1), \mathcal{T}(\chi_2), \mathcal{T}(\chi_\infty)$ mit $\prod_{n \in \{1,\dots,N\}} \mathcal{T}(d_n)$ übereinstimmen.

8. Sei $(-\infty, +\infty]$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}^{>} = \{(a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty]\}$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge K von $(-\infty, +\infty]$ genau dann bezüglich $\mathcal{T}^{>}$ kompakt ist, wenn K ein Minimum hat.

   Sei schließlich $(X, \mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, und $f : X \to (-\infty, +\infty]$ stetig mit $(-\infty, +\infty]$ durch $\mathcal{T}^{>}$ topologisiert; man spricht von einem von unten halbstetigen f. Zeigen Sie, dass dann $f(K)$ ein Minimum hat, also $f(x) \leq f(t)$ für alle $t \in K$ und ein $x \in K$ gilt.