Übungen zu Analysis 3, 1. Übung

1. Man zeige, dass $(-\infty, +\infty]$ versehen mit $\mathcal{T}^{>} := \{ (a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty] \}$ ein topologischer Raum ist. Begründen Sie dabei genau, warum der Schnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist!

   Weiters zeige man, dass in $(-\infty, +\infty]$ ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ gegen ein $x \in (-\infty, +\infty]$ genau dann konvergiert, wenn $x \leq \liminf_{i\in I} x_i := \sup_{k\in I} \inf_{I\ni i\geq k} x_i$.

2. Sei X eine nichtleere Menge, und definiere $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ als

$$\mathcal{T} := \{ A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich} \} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{O} := \{ A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich} \}.$$

   Für welche X sind $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{O}$ Topologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass X endlich oder unendlich ist.

3. Zeigen Sie, dass für eine Menge M und einen Filter $\mathfrak{F}$ auf M ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ genau dann eine Filterbasis von $\mathfrak{F}$ ist, wenn

$$\mathfrak{F} = \{ F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathfrak{B} : \ B \subseteq F \}.$$

   Zeigen Sie auch, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ Filterbasis höchstens eines Filters ist. Schließlich zeige man, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ genau dann Filterbasis eines Filters ist, wenn $\mathfrak{B}$ folgende beiden Eigenschaften erfüllt.

   (i) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,

   (ii) $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : \ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

4. Für $X := \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$ zeige man, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum ist. Ist er Hausdorffsch? Weiters bestimme man den Umgebungsfilter und eine möglichst kleine Filterbasis davon um jeden Punkt $x \in X$. Schließlich bestimme man den Abschluss einer jeden Teilmenge von X!

5. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f bei jedem isolierten Punkt $x \in X$, also $\{x\} \in \mathcal{T}$, stetig ist. Für nicht isolierte $x \in X$ zeige man, dass die Stetigkeit in x dazu äquivalent ist, dass $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$ konvergiert, wobei $(x_i)_{i\in I}$ das Netz aus Lemma 12.2.5 mit $B = X \setminus \{x\}$ ist.

   Anmerkung: Diese Äquivalenz entspricht der Charakterisierung $f(x) = \lim_{t\to x} f(t)$ von Stetigkeit im metrischen Fall.

6. Sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der von d_2 induzierten Topologie. Weiters sei $Y = (-1, +2) \times (-2, +1)$ versehen mit der von der Einschränkung $d_2|_{Y\times Y}$ von d_2 auf Y induzierten Topologie. Man gebe einen Homöomorphismus von X auf Y an!

7. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G derart, dass für alle $g \in G$ die Abbildungen $h \mapsto gh$ und $h \mapsto hg$ stetig sind. Geben Sie zunächst irgendein Beispiel für eine solche Gruppe samt Topologie an. Zeigen Sie weiters, dass für jedes $g \in G$ diese Abbildungen sogar Homöomorphismen sind. Zeigen Sie auch,

dass eine Untergruppe H von G, welche bzgl. $\mathcal{T}$ offen ist, auch abgeschlossen ist!

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{gH : g \in G\}$ eine Partition abgibt, also dass dieses Mengensystem die Restklassenmenge einer Äquivalenzrelation ist.

8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man zeige, dass für $C \subseteq X$ die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_C$ im Sinne von Beispiel 12.4.5 genau dann halbstetig von oben (unten) ist, wenn C abgeschlossen (offen) ist.

9. Sei M eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man zeige, dass $\{(a, b) : a, b \in M\}$ eine Basis und $\{(-\infty, q) : q \in M\} \cup \{(q, +\infty) : q \in M\}$ eine Subbasis der von der Euklidischen Metrik erzeugten Topologie $\mathcal{T}^1$ ist.

10. Sei X eine nichtleere Menge und bezeichne $\bigvee_{\mathcal{T} \in \mathscr{S}} \mathcal{T}$ für $\mathscr{S} \subseteq \mathrm{T}(X)$ den Schnitt aller Topologien $\mathcal{O} \in \mathrm{T}(X)$, die $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{T}$ für alle $\mathcal{T} \in \mathscr{S}$ erfüllen. Man zeige zunächst, dass $\bigvee_{\mathcal{T} \in \mathscr{S}} \mathcal{T} \in \mathrm{T}(X)$.

    Sind zusätzlich $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Funktionen, so zeige man auch, dass $f_j^{-1}(\mathcal{T}_j) \in \mathrm{T}(X)$ für jedes $j \in I$ und dass die zu den f_i, $i \in I$, gehörige initiale Topologie auf X mit $\bigvee_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{T}_j)$ übereinstimmt. Schließlich zeige man, dass diese initiale Topologie auf X auch mit dem Schnitt aller $\mathcal{T} \in \mathrm{T}(X)$ so, dass alle $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind, übereinstimmt.