# Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

**Prüfer: Gabriel Maresch**

**Prüfung am 27.6.2024**

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

---

**Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:**

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  **Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.**
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

---

Nur vom Prüfer auszufüllen:

| Aufgabe | I | II | III | IV | V | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| erreicht | | | | | | |

Aufgabe I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Definieren Sie den Begriff der „Vielfachheit" der Nullstelle eines Polynoms.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil C) Gegeben ist eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $p(\overline{z_0})$ und geben Sie an, welche Eigenschaften der komplexen Konjugation Sie jeweils verwendet haben.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Geben Sie ein Polynom möglichst kleinen Grades an, das nur *reelle* Koeffizienten besitzt und $z_0 = 3 + 4i$ als Nullstelle hat.

Aufgabe II .................................................................................................... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Was bedeutet es für eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu divergieren? Schreiben Sie die Bedingung in Formelschreibweise an!

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) Geben Sie ein $N \in \mathbb{N}$ an, sodass $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1000$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Ihre in Teil (A) gegebene Bedingung erfüllt.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Formulieren Sie das Verdichtungskriterium für harmonische Reihen.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Finden Sie durch Anwendung des Verdichtungskriteriums eine Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ und berechnen Sie den Wert dieser Majorante.

Aufgabe III . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 + \frac{x^3}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ an $x_0 = 0$ stetig ist oder nicht. Falls ja, geben Sie das in der $\varepsilon$-$\delta$ Charakterisierung der Stetigkeit geforderte $\delta(\varepsilon)$ an, falls nicht, geben Sie ein $\varepsilon > 0$ an, für das sich eben kein solches $\delta$ finden lässt. Fertigen Sie in jedem Fall eine Skizze an!

$\boxed{\text{5 P.}}$ (Teil B) Wie lautet der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen und offene Intervalle $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dennoch gelten *kann*.

Aufgabe IV ........................................................................................ *20 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Berechnen Sie für die reellen Funktionen

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{\ln(1+x^2)}$$
$$g : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2})$$

jeweils die erste Ableitung und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese überhaupt existiert. Geben Sie die von Ihnen verwendeten Ableitungsregeln an!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Welche der Funktionen $f$ bzw. $g$ aus Teil A lässt sich um $x = 0$ in eine Taylorreihe entwickeln? Begründen Sie kurz warum bzw. warum nicht (die Taylorreihe selbst braucht nicht angegeben zu werden).

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Geben Sie für jene Funktion(en) aus Teil A, für die das möglich ist, $T_{0;3}(x)$ an (Taylorpolynom 3. Grades um $x = 0$).

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Verwenden Sie die Rechenregeln für den Logarithmus, um die folgende Gleichung für die beiden Funktionen aus Teil A zu vervollständigen: $f^m = \alpha \cdot g$ mit $m = \ldots\ldots$ und $\alpha = \ldots\ldots$ $\quad (m, \alpha \in \mathbb{R})$.

Aufgabe V . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Sei $F$ eine Stammfunktion von $f$ und $g$ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto f(x)g(x)$ an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $p(x) = e^{-2x}x$.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Wo ist die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ stetig, wo differenzierbar? Wie lautet die Ableitung an jenen stellen, an denen $F$ differenziebar ist?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $\mathcal{Z}_1$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\mathcal{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$. Welche Ordnungsbeziehung ($\leq$) gilt zwischen den vier Unter- und Obersummen $U(f; \mathcal{Z}_1), O(f; \mathcal{Z}_1), U(f; \mathcal{Z}_2)$ und $O(f; \mathcal{Z}_2)$?

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.