Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Stoffsemester: 2023S Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 30.11.2023

Name (bitte ausfüllen): ....

Matrikelnummer (bitte ausfüllen): ....

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- Es werden nur die Lösungen auf dem jeweiligen Angabeblatt gewertet - d.h. verwenden Sie keine Extrablätter und schreiben Sie nicht z.B. die Lösung von Aufgabe 1 auf das Angabeblatt von Aufgabe 2! Die Rückseiten der Blätter können verwendet werden!

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Für welche $n, k \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert? Wie lautet die Definition und wie kann man Binomialkoeffizienten kombinatorisch interpretieren?

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil B) Wie lauten die Summationsgrenzen ① und ② sowie die Exponenten ③ und ④ im Binomischen Lehrsatz?

$$(a+b)^n = \sum_{①}^{②} \binom{n}{k} a^{③} b^{④}$$

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Schreiben Sie für $n = 3$ den Binomischen Lehrsatz an, führen Sie die Summation explizit durch (d.h. ohne $\sum$-Symbol) und berechnen Sie insbesondere die dabei auftretenden Binomialkoeffizienten!

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Berechnen Sie allgemein für gerades $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} = \ldots$

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Was bedeutet es, dass eine reelle Folge (a_n) alternierend ist? Geben Sie eine exakte Definition (d.h. in Formelschreibweise und mit Quantoren)!

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie die bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, um zu entscheiden ob die unendliche Folge $b_n = \sin\left(\pi \cdot (n + \frac{1}{n})\right)$ alternierend ist.
Hinweis: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil C) Formulieren Sie das Leibnizkriterium für alternierende Reihen inkl. aller notwendigen Voraussetzungen.

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil D) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler, den man macht, wenn man die Summation der unendlichen Reihe $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3^n}$ bei $N = 10$ abbricht? Können Sie diesem Fehler auch exakt angeben?

Aufgabe III .... *20 Punkte*

In dieser Aufgabe geht es um die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Wo ist f stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um zu zeigen, dass die Gleichung $f(x) = x$ im Intervall $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ mindestens eine Lösung besitzt.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Welche zusätzliche Eigenschaft der Funktion wäre hinreichend dafür, dass die Lösung aus Teil (B) eindeutig ist? Ist diese bei f erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Ist die Funktion f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil E) Ist die Funktion f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil A) Gegeben ist eine Funktion $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ mit zumindest auf dem Intervall (a, b) konvergenter Potenzreihendarstellung. Sie können dabei $x_0 \in (a, b)$ annehmen. Wie lauten die Werte $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \ldots$,?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil B) Gegeben ist eine Potenzreihe der Form $\sum a_n(x - 1)^n$ mit zumindest auf dem Intervall $(2, 4)$ konvergenter Potenzreihendarstellung. Hier ist also ungeschickterweise die Entwicklungsstelle $x_0 \notin (2, 4)$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall $(A, B) \supseteq (2, 4)$ an, auf dem die Potenzreihe notwendigerweise dann auch konvergieren muss!

Hinweis: Machen Sie eine Skizze am Zahlenstrahl und verwenden Sie, dass Konvergenzbereiche von Potenzreihen eine spezielle Form haben.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Wie berechnet man ganz allgemein den Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum a_n(x - x_0)^n$? Geben Sie einen Ausdruck für den Konvergenzbereich in Intervallschreibweise an!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Wie lautet konkret der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(x - 1)^n$?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Sei f die in Teil (D) definerte Grenzfunktion der Potenzreihe. Geben Sie das Taylorpolynom erster Ordnung für die *Umkehrfunktion* $f^{(-1)}(y)$ an der Entwicklungsstelle $y_0 := f(1)$ an!

Aufgabe V . . . . *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Finden Sie alle Stammfunktionen der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil B) Finden Sie eine Stammfunktion von $g(x) = \sin 3x$, indem Sie direkt substituieren.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Finden Sie eine andere Stammfunktion von $g(x) = \sin 3x$ indem Sie die Identität $\sin 3x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$ verwenden und im ersten Term geeignet substituieren.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil D) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt insbesondere, dass sich die Stammfunktionen aus Teil (B) und Teil (C) nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Wie lautet hier der eindeutige Zahlenwert dieser Konstanten? Skizzieren Sie nun die beiden Stammfunktionen.

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil E) Wie lautet überhaupt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?