

# Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 25.11.2022

---

## Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D . . .  
Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
  - Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
  - In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.  
**Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.**
  - Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- 

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I..... 20 Punkte

8 P. (Teil A) Faktorisieren Sie das Polynom  $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$  in reell irreduzible Faktoren und geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung  $p(x) = 0$  an!

4 P. (Teil B) Wie lauten die Summationsgrenzen ① und ② sowie die Exponenten ③ und ④ im Binomischen Lehrsatz?

$$(x + y)^n = \sum_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \binom{n}{k} x^{\textcircled{3}} y^{\textcircled{4}}$$

4 P. (Teil C) Schreiben Sie für  $n = 4$  den Binomischen Lehrsatz an, führen Sie die Summation explizit durch (d.h. ohne  $\sum$ -Symbol) und berechnen Sie insbesondere die dabei auftretenden Binomialkoeffizienten!

4 P. (Teil D) Verwenden Sie Ihre Formel aus (C), um für passend gewähltes  $x = \dots\dots$  und  $y = \dots\dots$  die Potenz  $99^4$  explizit und ohne Taschenrechner zu berechnen!

2 P. (Teil A) Das **Sandwich-Theorem** erlaubt es, von der Konvergenz zweier Folgen  $a_n$  und  $b_n$  mit  $a_n \leq x_n \leq b_n$  (für alle bis auf endliche viele  $n \in \mathbb{N}$ ) auf die Konvergenz der Folge  $x_n$  zu schließen. Was muss dabei für die Grenzwerte  $\lim a_n$  und  $\lim b_n$  gelten, damit das möglich ist?

8 P. (Teil B) Verwenden Sie das Sandwich-Theorem aus Teil A und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , um den Grenzwert der unendlichen Folge  $x_n = \sqrt[n]{2 + n^2}$  zu berechnen. Geben Sie dazu  $a_n$  und  $b_n$  wie in Teil A gefordert an!

$$a_n = \underline{\hspace{2cm}}, \quad b_n = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

10 P. (Teil C) Untersuchen Sie die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$  auf Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz ein Intervall  $[a, b]$  an, von dem Sie argumentieren können, dass es den Grenzwert enthält.

- 4 P. (Teil A) Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow W$  mit  $f(x) = \frac{x+4}{2x+10}$ . Wie muss man  $W$  wählen, damit  $f$  surjektiv ist?
- 4 P. (Teil B) Ist  $f : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow W$  aus Teil (A) umkehrbar? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion (inkl. deren Definitionsbereich und Wertebereich) an; wenn nein, argumentieren Sie, warum eine Umkehrfunktion nicht existiert.
- 4 P. (Teil C) Was bedeutet es für eine reelle Funktion „monoton fallend“ zu sein? Geben Sie eine exakte Definition.
- 4 P. (Teil D) Ist gemäß Ihrer Definition aus Teil (C) die Funktion  $f$  aus Teil (A) monoton fallend? Wenn ja, rechnen Sie nach, dass die Definition auch tatsächlich erfüllt ist, wenn nein, bringen Sie ein explizites Gegenbeispiel.
- 2 P. (Teil E) Die Funktion  $f$  aus Teil (A) ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Wieso?
- 2 P. (Teil F) Die Funktion  $f$  aus Teil (A) besitzt weder Minimum, noch Maximum. Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz vom Maximum für stetige Funktionen?

8 P. (Teil A) Berechnen Sie für die reellen Funktionen

$$f : x \mapsto \sqrt{\ln(1 + x^2)}$$
$$g : x \mapsto \ln(\sqrt{1 + x^2})$$

jeweils die erste Ableitung und geben Sie an, für welche  $x \in \mathbb{R}$  diese überhaupt existiert. Geben Sie die von Ihnen verwendete Ableitungsregeln an!

4 P. (Teil B) Welche der Funktionen  $f$  bzw.  $g$  aus Teil A lässt sich um  $x = 0$  in eine Taylorreihe entwickeln? Begründen Sie kurz warum bzw. warum nicht (die Taylorreihe selbst braucht nicht angegeben zu werden).

6 P. (Teil C) Geben Sie für jene Funktion(en) aus Teil A, für die das möglich ist,  $T_{0,3}(x)$  an (Taylorpolynom 3. Grades um  $x = 0$ ).

2 P. (Teil D) Verwenden Sie die Rechenregeln für den Logarithmus, um die folgende Gleichung für die beiden Funktionen aus Teil A zu vervollständigen:  $f^m = \alpha \cdot g$  mit  $m = \dots\dots$  und  $\alpha = \dots\dots$  ( $m, \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Aufgabe V ..... 20 Punkte

4 P. (Teil A) Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $g$  eine differenzierbare Funktion. Geben Sie mit Hilfe von  $F$  eine Stammfunktion von  $f(x)g(x)$  an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

6 P. (Teil B) Bestimmen Sie unter Verwendung von Teil A eine Stammfunktion von  $x \mapsto \cos^2 x$ .

4 P. (Teil C) Geben Sie eine geometrische Interpretation des Integrals

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

an und berechnen Sie dessen Wert.

6 P. (Teil D) Berechnen Sie die Untersumme  $U(f; \mathcal{Z})$  und die Obersumme  $O(f; \mathcal{Z})$  für die Funktion  $f(x) = \cos^2 x$  und die Zerlegung  $\mathcal{Z}$  mit  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$  des Intervalls  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.