PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3
Punkte	/10	/10	/10

1. Betrachten Sie die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } a \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Welche gestaffelte Form U ergibt sich mithilfe des Gauß-Algorithmus?

$$U_1 = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & a-\frac{7}{8} \end{pmatrix} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & a-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Auswahl durch Ihre Rechnung.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

(c) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A singulär? Berechnen Sie Kern A unter Verwendung der ermittelten Konstante.

(d) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, für

(i) $a = 1$ und $\boldsymbol{b} = (10, 7, 3)^{\mathrm{T}}$,

(ii) $a = \frac{7}{8}$ und $\boldsymbol{b} = (2, 4, 0)^{\mathrm{T}}$.

In welchem Fall ist das lineare Gleichungssystem **nicht** eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die jeweiligen Lösungen.

2. Gegeben sei eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ und eine Basis C des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A = [\varphi(E_2)]_{E_3}$ und begründen Sie, warum φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des kommutativen Diagramms an.

(c) Weisen Sie nach, dass die Abbildungsmatrix $\tilde{A} = [\varphi(B)]_C$ durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(d) Sei $\boldsymbol{v} = (5, 2)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie $[\boldsymbol{v}]_B$, und ermitteln Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$ auf zwei verschiedene Arten.

3. Gegeben sei die Matrix A und die zugehörige Jordan'sche Normalform J durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Begründen Sie, warum das charakteristische Polynom von A durch

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren für die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_3 = 0$.

(c) Für $\lambda_2 = 3$ ist ein Eigenvektor gegeben durch $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$.

(d) Welche der folgenden Matrizen könnten **keine** Jordan'sche Normalform von A darstellen? Begründen Sie Ihre Auswahl!

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad J_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$