Gruppe A

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3
Punkte	/10	/12	/8

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie, dass $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ gilt, mit $\lambda_1 = 2$.

(b) Der einzig weitere Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$. Berechnen Sie den Eigenvektor $\boldsymbol{v}_2$ zu λ_2.

(c) Bestimmen Sie den zu $\boldsymbol{v}_1$ gehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$.

(d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{h}_2 = (0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ der zu $\boldsymbol{v}_2$ gehörige Hauptvektor ist. Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sowie die Jordan'sche Normalform $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt.

(e) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$

an und lösen Sie das Anfangswertproblem $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (4,6,2,6)^{\mathrm{T}}$.

2. Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ mit

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ eine Orthogonalbasis von U bilden. Wandeln Sie diese anschließend in eine Orthonormalbasis um.

(b) Sei $\boldsymbol{v} = (0,-2,-6,1,3)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$, sodass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ minimal wird.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\tilde{B}$ des orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ des Unterraums U.

(d) **Bonus** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

3. Betrachten Sie den Vektorraum $V = P_2$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Weiters sei $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt auf $V = P_2$ darstellt.

(b) Berechnen Sie die Norm von $f(x) = 7x^2 + 2x - 6$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.

(c) Sei $g(x) = ax^2 + 2x + 1$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $g(x)$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts orthogonal zu $f(x)$ aus (b) wird.

Hinweis: In dieser Aufgabe soll ausgenutzt werden, dass für eine ungerade Funktion f

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

und für eine gerade Funktion f

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x$$

gilt.

Bonus *(1 Punkt)* Sei $Y = Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t) \in \mathbb{R}^n$. Überprüfen Sie, ob

$$\int Y(t) \, \dot{\boldsymbol{c}}(t) \, \mathrm{d}t = Y(t) \, \boldsymbol{c}(t) - \int \dot{Y}(t) \, \boldsymbol{c}(t) \, \mathrm{d}t$$

gilt.

Gruppe B

Punkteverteilung:

Beispiel	1	2	3
Punkte	/10	/12	/8

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $\boldsymbol{v}_1 = (2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie, dass $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ gilt, mit $\lambda_1 = 2$.

(b) Der einzig weitere Eigenwert ist $\lambda_2 = 3$. Berechnen Sie den Eigenvektor $\boldsymbol{v}_2$ zu λ_2.

(c) Bestimmen Sie zu $\boldsymbol{v}_1$ den zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$.

(d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{h}_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ der zu $\boldsymbol{v}_2$ gehöriger Hauptvektor ist.
Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sowie die Jordan'sche Normalform $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt.

(e) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$

an und lösen Sie das Anfangswertproblem $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (5, 6, 4, 4)^{\mathrm{T}}$.

2. Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ mit

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ eine Orthogonalbasis von U bilden. Wandeln Sie diese anschließend in eine Orthonormalbasis um.

(b) Sei $\boldsymbol{v} = (-1, -2, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$, sodass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ minimal wird.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\tilde{B}$ des orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ des Unterraums U.

(d) **Bonus** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

3. Betrachten Sie den Vektorraum $V = P_2$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Weiters sei $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt auf $V = P_2$ darstellt.

(b) Berechnen Sie die Norm von $f(x) = -7x^2 - x + 9$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.

(c) Sei $g(x) = ax^2 + 4x + 1$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $g(x)$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts orthogonal zu $f(x)$ aus (b) wird.

Hinweis: In dieser Aufgabe soll ausgenutzt werden, dass für eine ungerade Funktion f

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

und für eine gerade Funktion f

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x$$

gilt.

Bonus *(1 Punkt)* Sei $Y = Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t) \in \mathbb{R}^n$. Überprüfen Sie, ob

$$\int Y(t) \, \dot{\boldsymbol{c}}(t) \, \mathrm{d}t = Y(t) \, \boldsymbol{c}(t) - \int \dot{Y}(t) \, \boldsymbol{c}(t) \, \mathrm{d}t$$

gilt.