

## Gruppe A

1. Gegeben seien die Unterräume  $U$  und  $W$  des  $\mathbb{R}^5$ , wobei

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\},$$

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 2s - 6t, \quad x_2 = -4t, \quad x_3 = 3s + t, \quad x_4 = 2t, \quad x_5 = -2s, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie Basen von  $U$  und  $W$  sowie die jeweiligen Dimensionen.  
 (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kriteriums für direkte Summen, dass  $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ .  
 (c) Stellen Sie den Vektor  $\mathbf{v} = (0, 0, -1, -1, 2)^T$  als  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  mit  $\mathbf{u} \in U$  und  $\mathbf{w} \in W$  dar.
2. Das folgende lineare Gleichungssystem der Form  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  ist gegeben durch

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bilden Sie die erweiterte Matrix  $(A|\mathbf{b})$  und formen Sie diese unter Verwendung des Gauß-Algorithmus in die gestaffelte Form um.  
 (b) Bestimmen Sie  $\text{Rang } A$  sowie  $\dim(\text{Kern } A)$ . Begründen Sie, warum das System lösbar ist.  
 (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $\mathbf{x}$  des Systems.  
 (d) Bildet  $(\text{Kern } A, +)$  eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Sei  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, wobei  $V = P_2$  der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ist und  $W = \mathbb{R}^2$ . Der Vektorraum  $V$  ist mit einer Basis  $B_1 = \{1, x, x^2\}$  und einer Basis  $B_2 = \{x-1, x+1, x^2\}$  ausgestattet. Weiters sei die Abbildungsmatrix  $[\varphi(B_1)]_{C_1}$  gegeben durch

$$[\varphi(B_1)]_{C_1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Transformationsmatrix  $T_{C_1 \leftarrow C_2}$  des Basiswechsels von  $C_2$  zu  $C_1$

$$T_{C_1 \leftarrow C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  zwei Basen von  $W$  sind.

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $[\varphi(B_2)]_{C_2}$ .  
 (b) Bestimmen Sie die Determinante von  $T_{C_2 \leftarrow C_1}$ .  
 (c) Sei  $[\mathbf{v}]_{B_2} = (-3, 1, -2)^T$ . Bestimmen Sie  $[\mathbf{v}]_{B_1}$  und  $[\varphi(\mathbf{v})]_{C_1}$ .

## Gruppe B

1. Gegeben seien die Unterräume  $U$  und  $W$  des  $\mathbb{R}^5$ , wobei

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\},$$

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3t, x_2 = -2t, x_3 = s + 6t, x_4 = s, x_5 = 2t, s, t \in \mathbb{R} \}.$$

- (a) Bestimmen Sie Basen von  $U$  und  $W$  sowie die jeweiligen Dimensionen.  
 (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kriteriums für direkte Summen, dass  $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ .  
 (c) Stellen Sie den Vektor  $\mathbf{v} = (-3, 0, -2, 2, 0)^T$  als  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  mit  $\mathbf{u} \in U$  und  $\mathbf{w} \in W$  dar.
2. Das folgende lineare Gleichungssystem der Form  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  ist gegeben durch

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bilden Sie die erweiterte Matrix  $(A|\mathbf{b})$  und formen Sie diese unter Verwendung des Gauß-Algorithmus in die gestaffelte Form um.  
 (b) Bestimmen Sie  $\text{Rang } A$  sowie  $\dim(\text{Kern } A)$ . Begründen Sie, warum das System lösbar ist.  
 (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $\mathbf{x}$  des Systems.  
 (d) Bildet  $(\text{Kern } A, +)$  eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Sei  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, wobei  $V = P_2$  der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ist und  $W = \mathbb{R}^2$ . Der Vektorraum  $V$  ist mit einer Basis  $B_1 = \{1, x, x^2\}$  und einer Basis  $B_2 = \{1 - x, 1 + x, x^2\}$  ausgestattet. Weiters sei die Abbildungsmatrix  $[\varphi(B_1)]_{C_1}$  gegeben durch

$$[\varphi(B_1)]_{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Transformationsmatrix  $T_{C_1 \leftarrow C_2}$  des Basiswechsels von  $C_2$  zu  $C_1$

$$T_{C_1 \leftarrow C_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  zwei Basen von  $W$  sind.

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $[\varphi(B_2)]_{C_2}$ .  
 (b) Bestimmen Sie die Determinante von  $T_{C_2 \leftarrow C_1}$ .  
 (c) Sei  $[\mathbf{v}]_{B_2} = (3, 1, -2)^T$ . Bestimmen Sie  $[\mathbf{v}]_{B_1}$  und  $[\varphi(\mathbf{v})]_{C_1}$ .