Institut für Analysis und Scientific Computing — TU Wien
A. Körner, E. Weinmüller — WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Nachtest (Mo, 20.02.2023)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 18

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, eine Basis des Kern der Matrix A und dessen Dimension.

b) (4 Punkte) Gegeben seien die folgenden erweiterten Matrizen $(A|\boldsymbol{b})$:

$$\text{i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \text{ii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right), \quad \text{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right), \quad \text{iv)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Bestimmen Sie für die vier erweiterten Matrizen i)-iv), ob das jeweilige Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, oder eine mehrdeutige Lösung hat. Im Falle einer mehrdeutigen Lösung geben Sie an, von wievielen Parametern diese Lösung abhängt. Begründen Sie Ihre Antwort.

- **Aufgabe 2.**

a) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem kanonischen inneren Produkt versehen. Bestimmen Sie mithilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (2 Punkte) Gegeben sei der Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{v}$ auf den Unterraum U aus a).

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom folgende Gestalt hat:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$$

b) (3.5 Punkte) Wie lauten die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie mögliche zugehörige Eigenvektoren. Die Berechnung von Hauptvektoren ist nicht notwenig.

c) (1 Punkt) Auf welche der untenstehenden Jordan'schen Normalformen kann A transformiert werden? Begründen Sie Ihre Wahl.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$