Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Test, Gruppe A (Di, 24.1.2023)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

• **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2x_1 - cx_2 + cx_3 & = b_1, \\ cx_1 - 3x_2 - 2x_3 & = b_2, \\ cx_1 + cx_3 & = b_3, \end{cases}$$

  mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

  a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um.

     Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

  b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = -2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

     Gegeben sei eine weitere Basis B des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

     Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B.

  c) (1,5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_E$ auf zwei verschiedene Arten:

     (i) unter Verwendung von $[\varphi(E)]_E$,

     (ii) unter Verwendung von $[\varphi(B)]_B$.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

  a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Mithilfe welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

  b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

  c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

L I N E A R E A L G E B R A F Ü R T P H, U E (103.064)

2. Test, Gruppe B (Di, 24.1.2023)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Mithilfe welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{cases} -2x_1 + cx_2 + cx_3 & = b_1 \\ \;\; cx_1 + cx_3 & = b_2 \\ cx_1 - 3x_2 - 2x_3 & = b_3 \end{cases}$$

  mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

  a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um.

     Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

  b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = -2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

     Gegeben sei eine weitere Basis B des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

     Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B.

  c) (1,5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (0, 1, 0)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_E$ auf zwei verschiedene Arten:

     (i) unter Verwendung von $[\varphi(E)]_E$,

     (ii) unter Verwendung von $[\varphi(B)]_B$.

- **Aufgabe 3.**

  a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

     ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

  b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

L I N E A R E   A L G E B R A   F Ü R   T P H,   U E (103.064)

2. Test, Gruppe C (Di, 24.1.2023)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 + x_4 y_4$$

ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie es so weit wie möglich. Aus welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{cases} cx_1 + cx_3 & = b_1 \\ -3x_1 + cx_2 + cx_3 & = b_2 \\ cx_1 - 2x_2 - 3x_3 & = b_3 \end{cases}$$

mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um.

Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = 2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

Gegeben sei eine weitere Basis B des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B.

c) (1.5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_E$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) unter Verwendung von $[\varphi(E)]_E$,

(ii) unter Verwendung von $[\varphi(B)]_B$.