

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. —

— Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe A1.**

Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

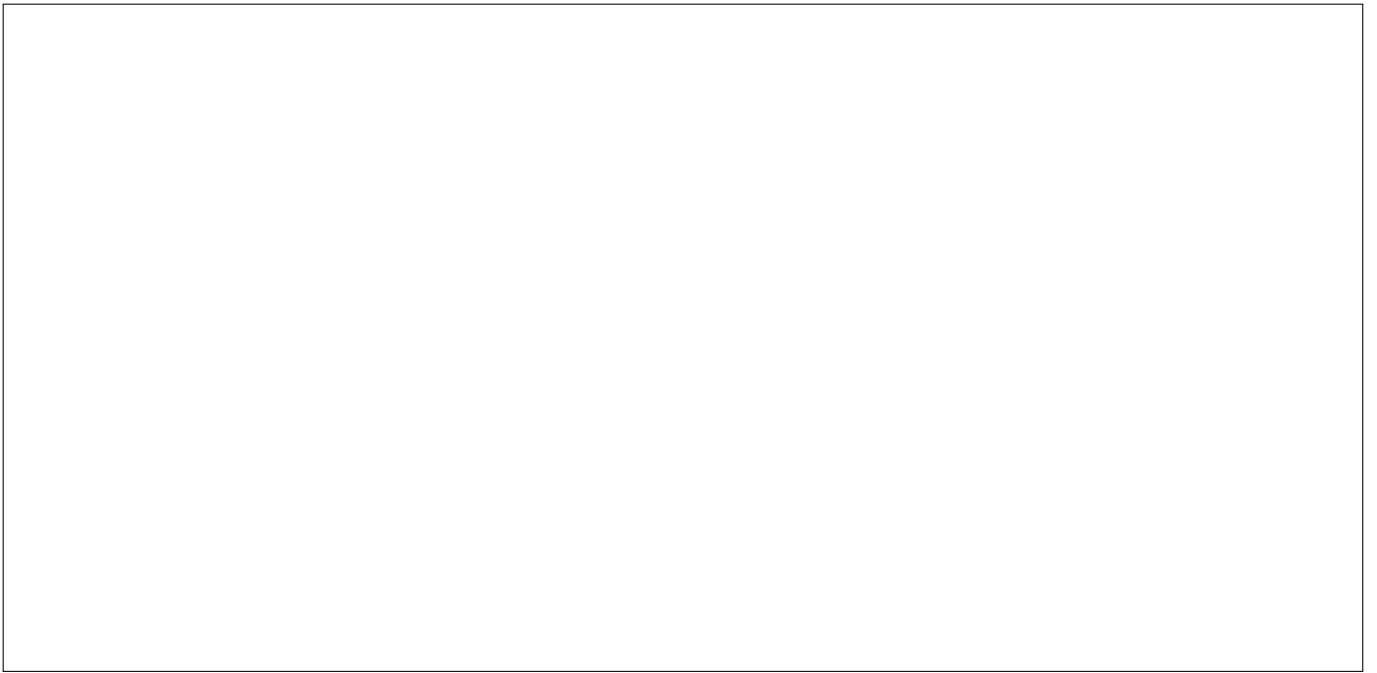
$$\begin{aligned}(\alpha - 2)x_1 - 2x_2 + (2\alpha - 2)x_3 &= 2\alpha - 2 \\ 3x_2 &= 6 \\ x_2 + (\alpha - 1)x_3 &= \alpha + 1\end{aligned}$$

- a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems.

- b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

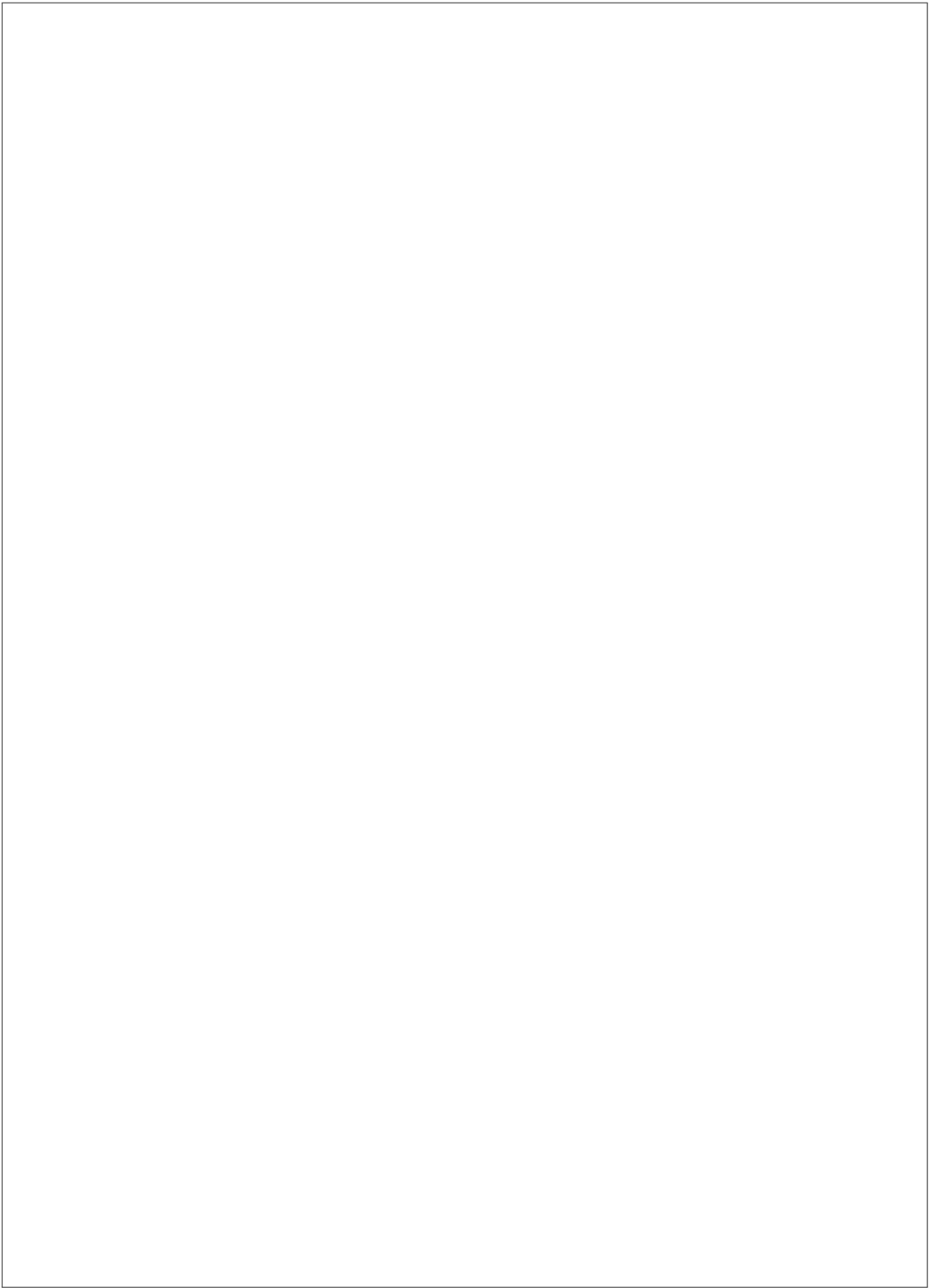
$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha - 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{array} \right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!



- c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α . Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den $\text{Kern}(A)$ und dessen Dimension an!





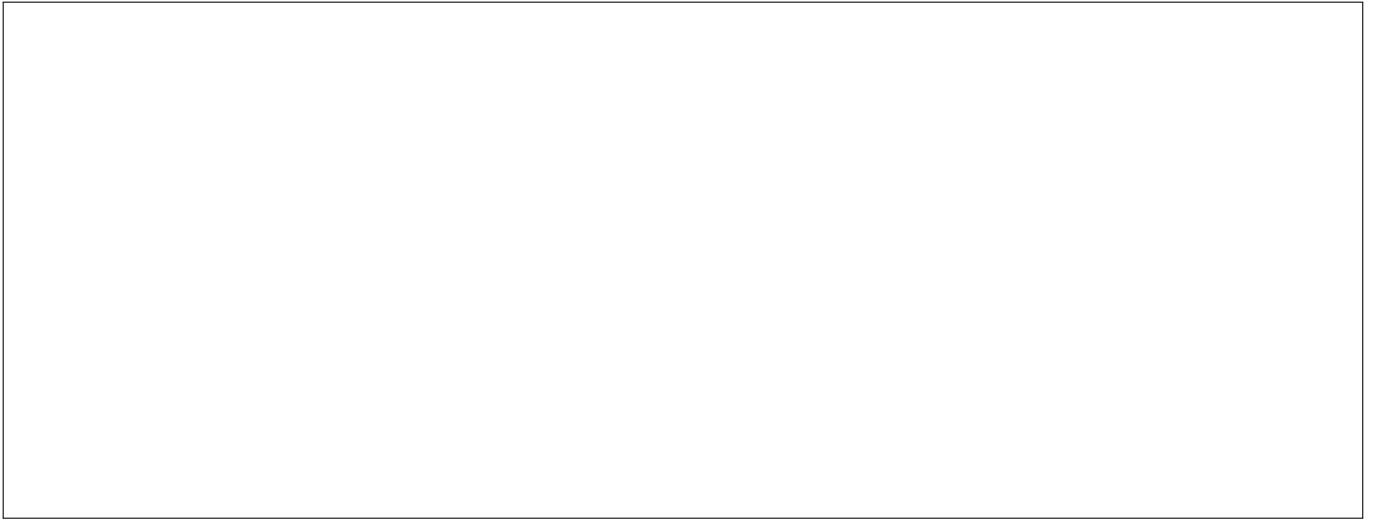
• **Aufgabe A2.**

Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über \mathbb{R} .

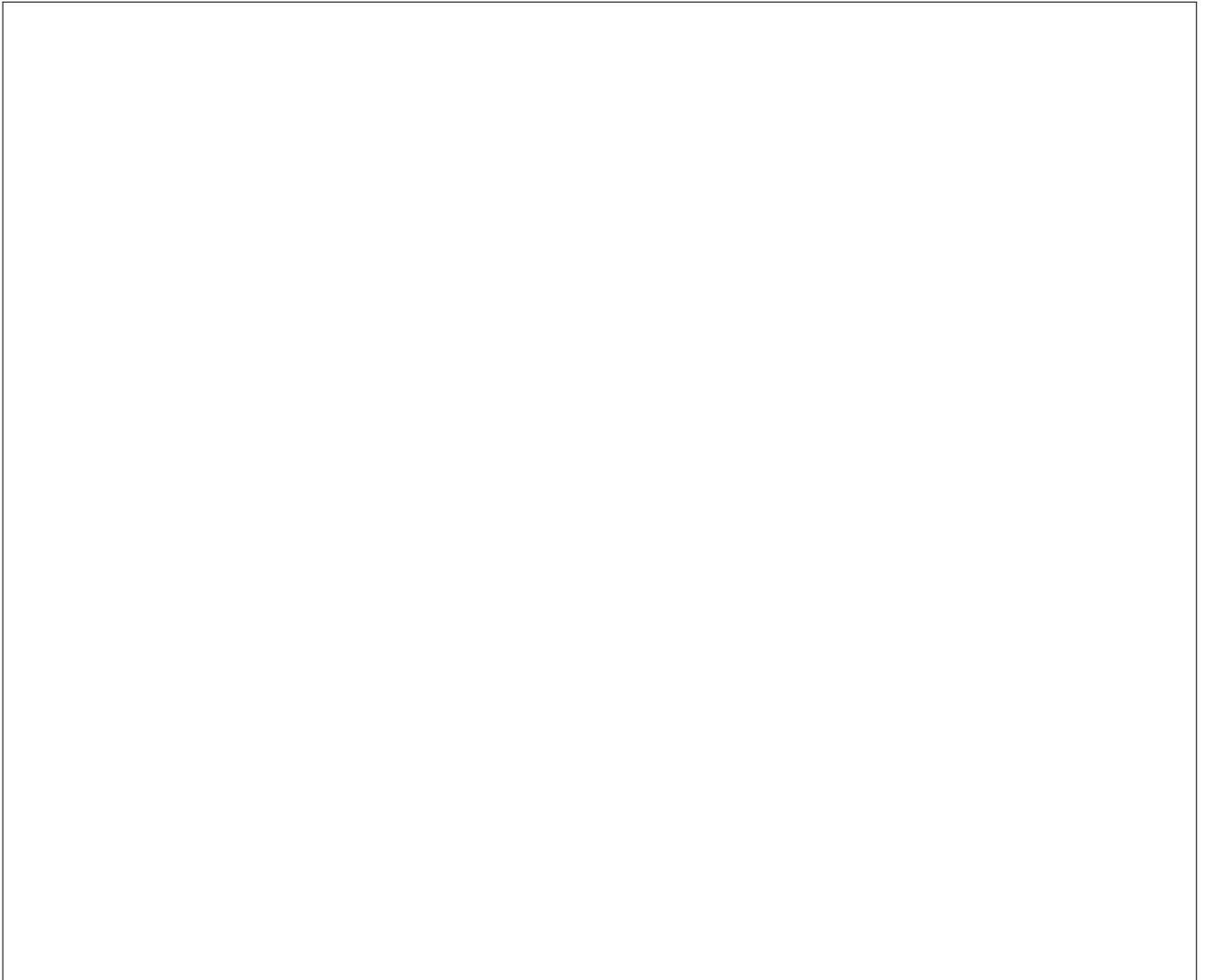
a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.



- b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (4, -2, 3, -2)^T$ die dazugehörige Matrix A . Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).



c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{4 \times 5}$?

(d) (1.5 Punkte) Begründen Sie, warum die Menge der (2×2) -Matrizen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$ eine Gruppe bildet. Ist diese kommutativ?

• **Aufgabe A3.**

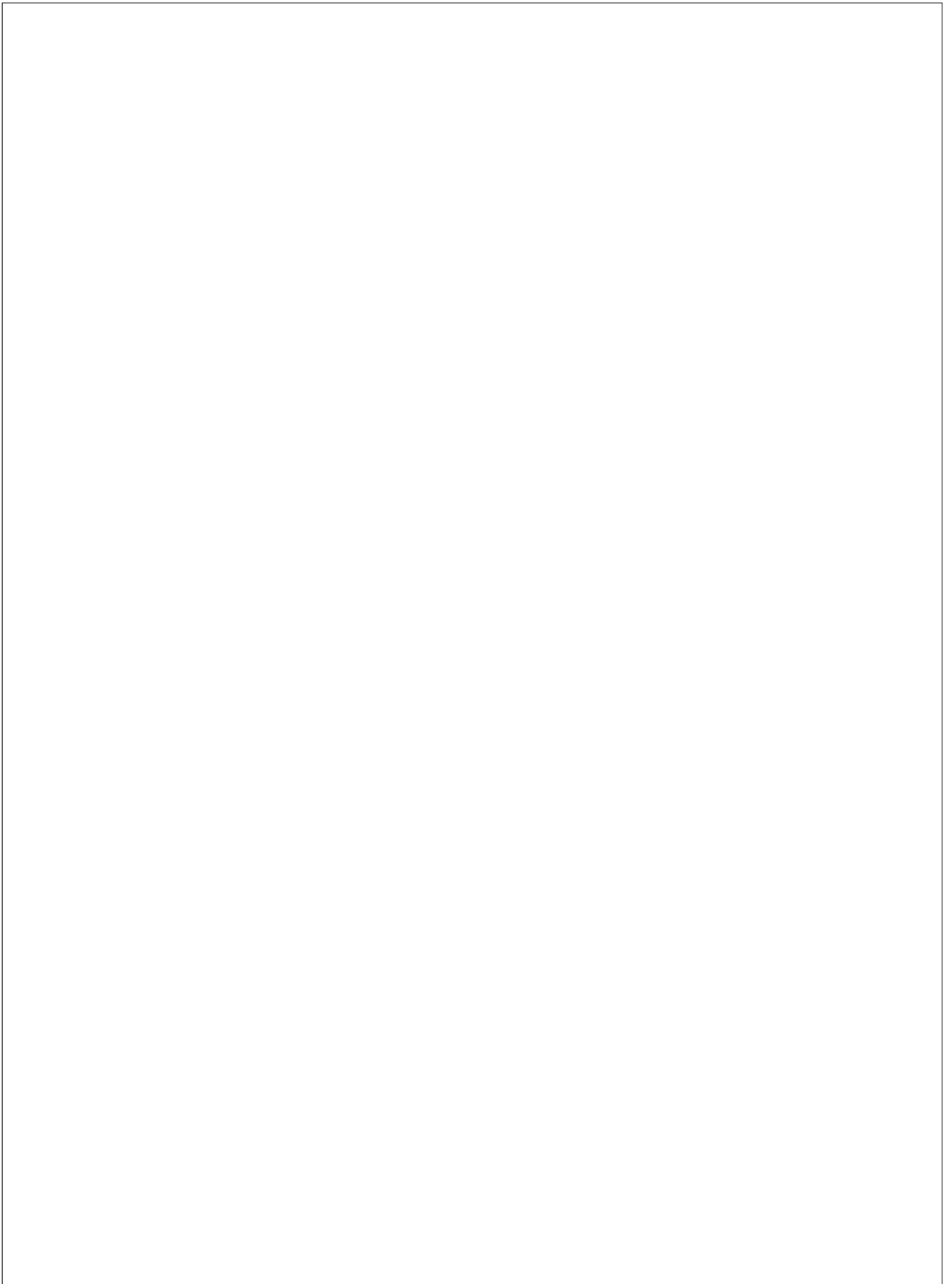
a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$$
$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 2x_5 = 0\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W .

- b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

- c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_3 - x_4 -Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.



LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. —

— Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe B1.**

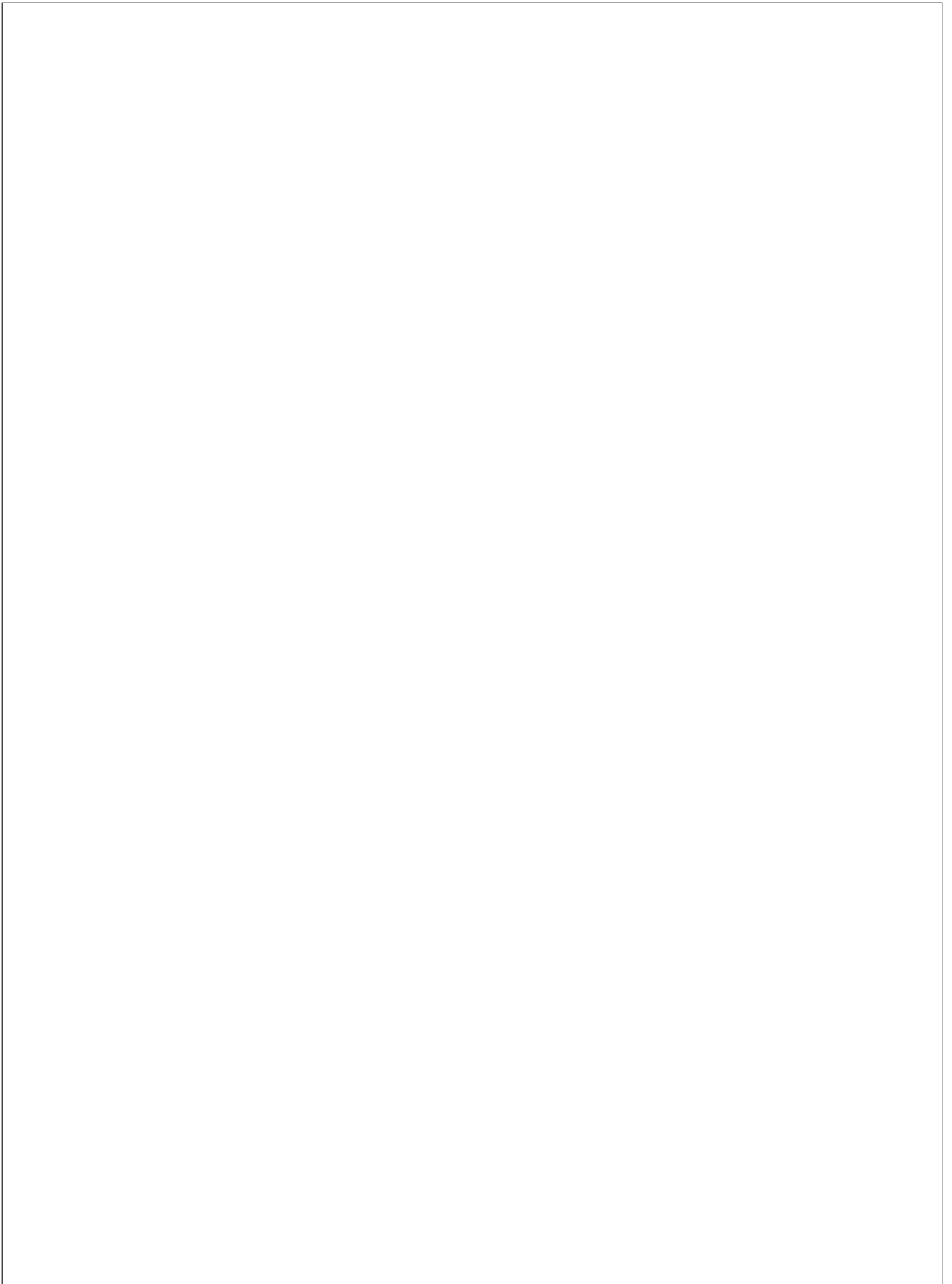
a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_2 - x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$$
$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 - 3x_5 = 0, \quad 2x_2 - 3x_4 = 0\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W .

- b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

- c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_1 - x_3 -Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.



• **Aufgabe B2.**

Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

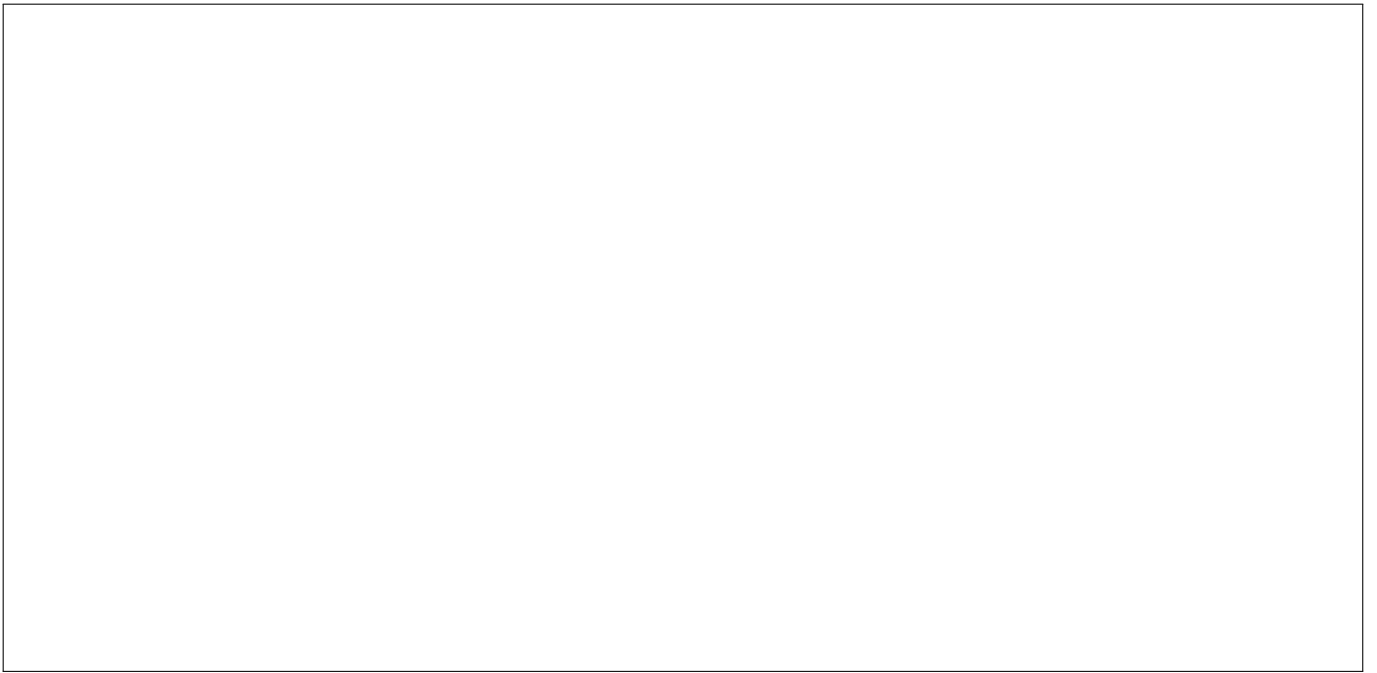
$$\begin{aligned}(\alpha - 2)x_1 + x_2 &= \alpha \\ 3x_2 &= 6 \\ (2\alpha - 4)x_1 + (\alpha - 1)x_3 &= 2\alpha - 3\end{aligned}$$

- a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems.

- b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

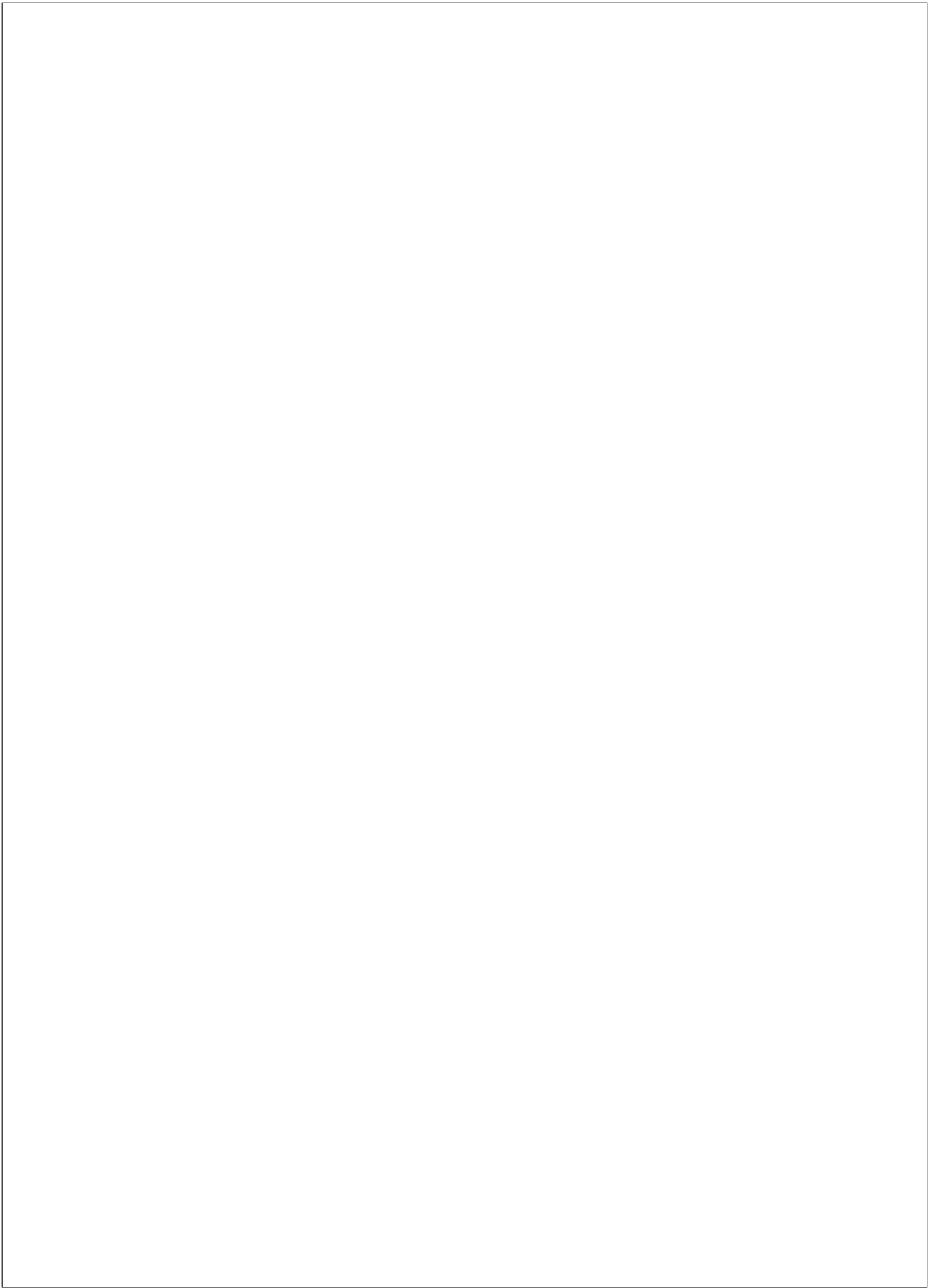
$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha - 2 & 0 & 0 & \alpha - 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{array} \right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!



- c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α . Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den $\text{Kern}(A)$ und dessen Dimension an!





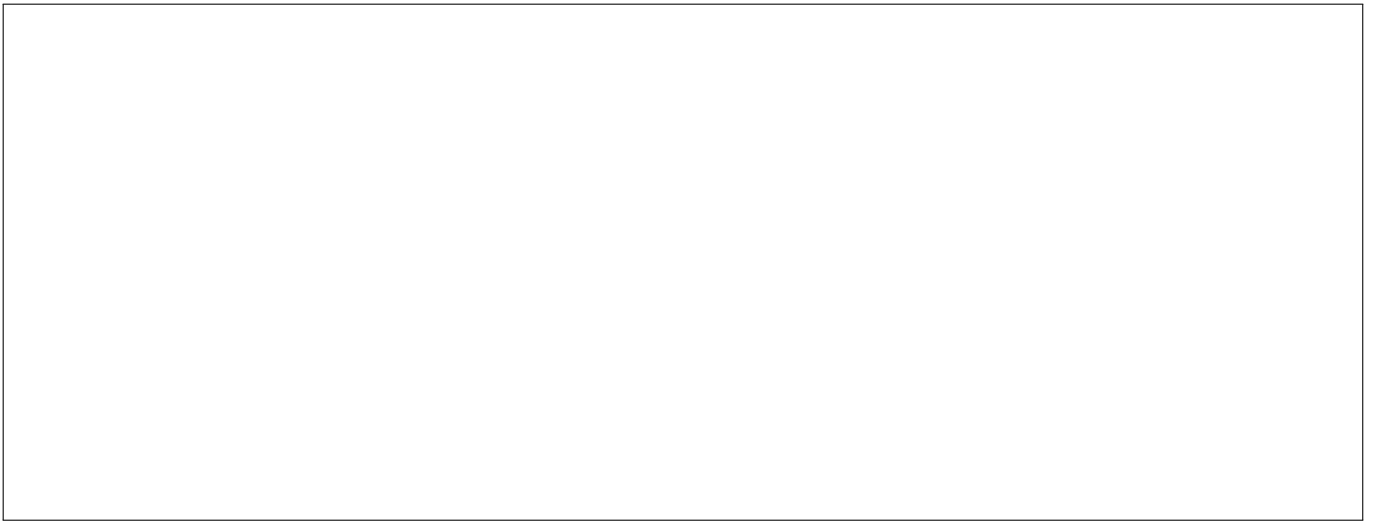
• **Aufgabe B3.**

Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über \mathbb{R} .

a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.



- b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (2, -3, 1, 4)^T$ die dazugehörige Matrix A . Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).



c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{7 \times 3}$?

(d) (1.5 Punkte) Begründen Sie, warum die Menge der (2×2) -Matrizen mit der üblichen Multiplikation $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot)$ ein Monoid bildet. Ist dieses kommutativ?

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

- *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —
- *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

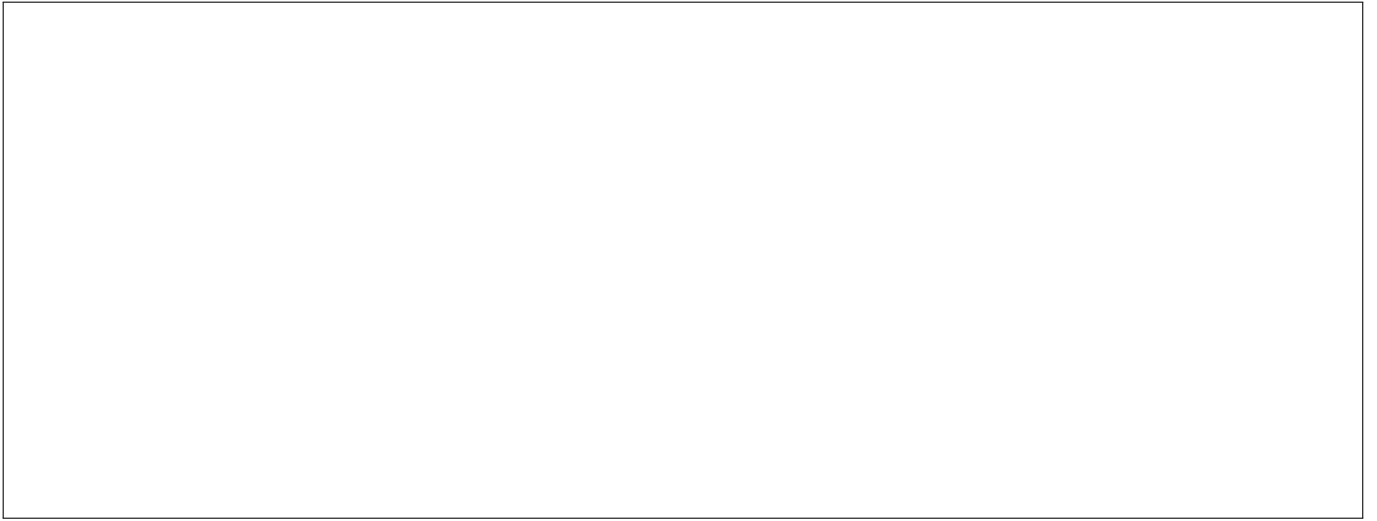
• **Aufgabe C1.**

Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über \mathbb{R} .

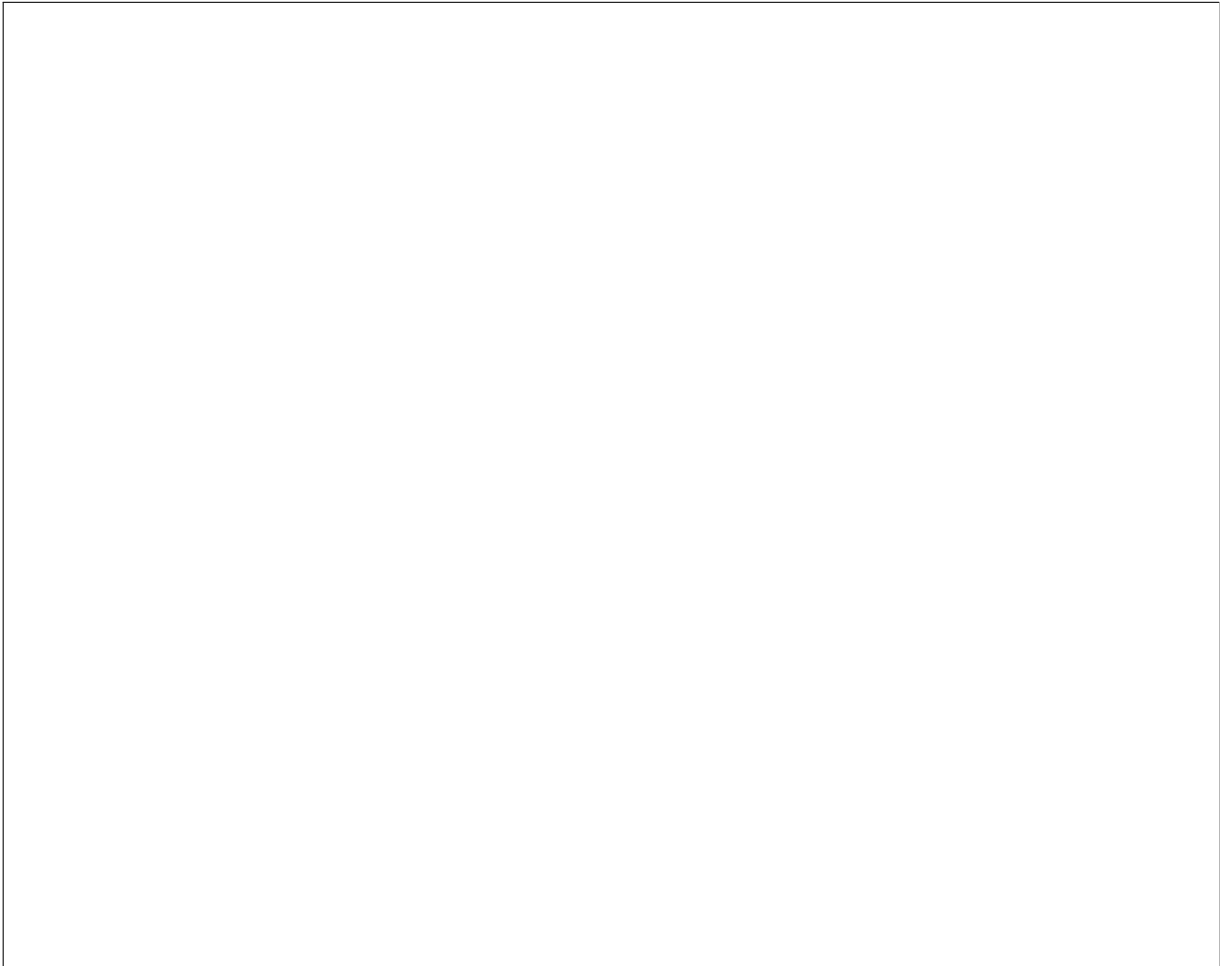
a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.



- b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (3, -2, 4, 2)^T$ die dazugehörige Matrix A . Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).



c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{6 \times 4}$?

(d) (1.5 Punkte) Die Menge der (2×2) -Matrizen versehen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe. Begründen Sie, warum diese gemeinsam mit der üblichen Matrizenmultiplikation $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot)$ einen Ring bildet.

• Aufgabe C2.

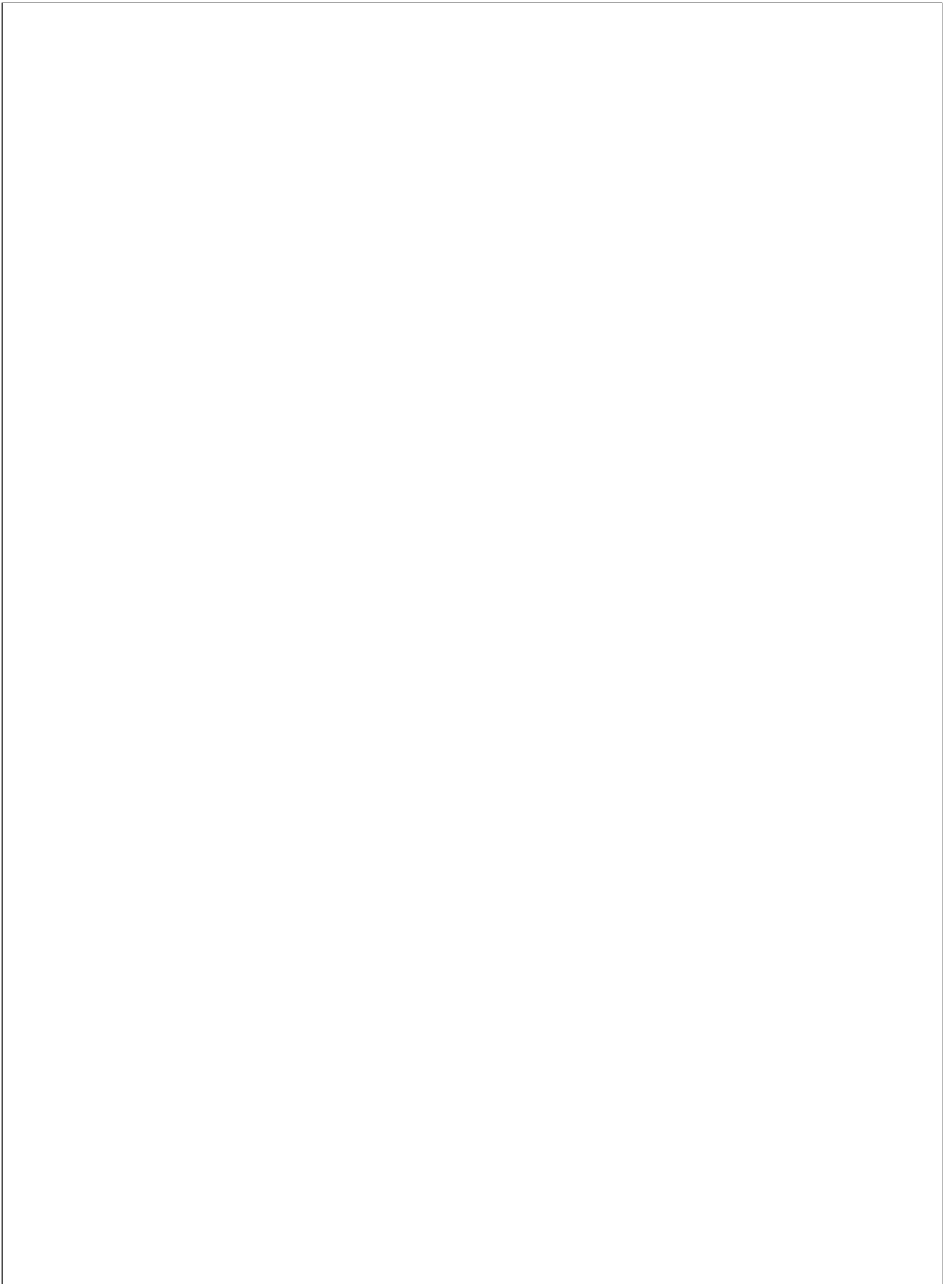
a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_5 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, \quad x_5 - x_4 = 0, \quad 4x_5 - x_3 = 0\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W .

- b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

- c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_1 - x_2 -Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.



• **Aufgabe C3.**

Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

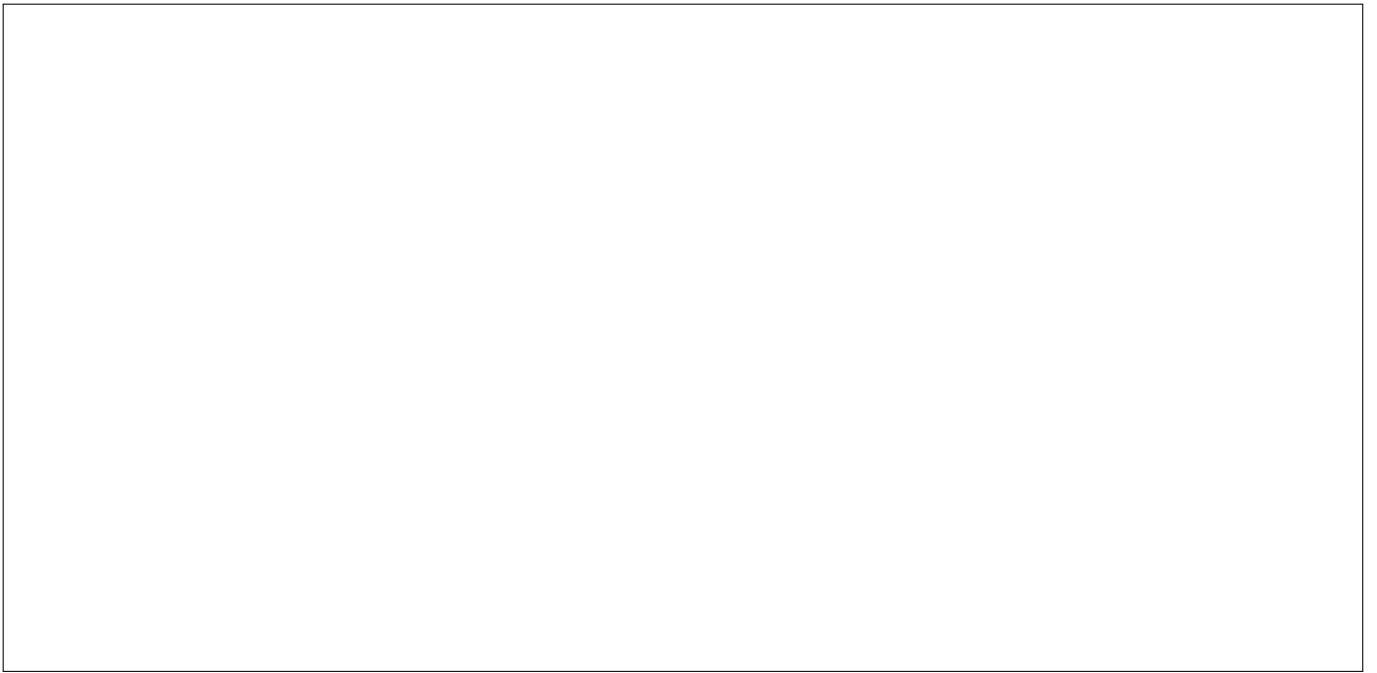
$$\begin{aligned}(\alpha + 2)x_1 + x_2 &= \alpha + 4 \\ 2x_2 &= 4 \\ (2\alpha + 4)x_1 + (\alpha + 1)x_3 &= 2\alpha + 5\end{aligned}$$

- a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems.

- b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha + 2 & 0 & 0 & \alpha + 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 & 1 \end{array} \right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!



- c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α . Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den $\text{Kern}(A)$ und dessen Dimension an!



