Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe A1.**
  Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

$$
\begin{aligned}
(\alpha-2)x_1 - 2x_2 + (2\alpha-2)x_3 &= 2\alpha-2 \\
3x_2 &= 6 \\
x_2 + (\alpha-1)x_3 &= \alpha+1
\end{aligned}
$$

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$
(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha-2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right).
$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!

c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A) und dessen Dimension an!

- **Aufgabe A2.**
  Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

  a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

  eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.

b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (4, -2, 3, -2)^T$ die dazugehörige Matrix A. Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).

c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{4\times 5}$?

(d) (1.5 Punkte) Begründen Sie, warum die Menge der (2×2)-Matrizen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ eine Gruppe bildet. Ist diese kommutativ?

- **Aufgabe A3.**

a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 2x_5 = 0 \right\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W.

b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_3-x_4-Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe B1.**

a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_2 - x_1 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 - 3x_5 = 0, \quad 2x_2 - 3x_4 = 0 \right\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W.

b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_1-x_3-Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.

- **Aufgabe B2.**
  Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

$$\begin{aligned} (\alpha-2)x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\qquad &= \alpha \\ 3x_2 \qquad\qquad\qquad &= 6 \\ (2\alpha-4)x_1 \qquad\qquad + (\alpha-1)x_3 &= 2\alpha-3 \end{aligned}$$

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha-2 & 0 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1 \end{array}\right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!

c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A) und dessen Dimension an!

- **Aufgabe B3.**
  Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

  a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

  eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.

b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (2, -3, 1, 4)^T$ die dazugehörige Matrix A. Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).

c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{7\times 3}$?

(d) (1.5 Punkte) Begründen Sie, warum die Menge der (2×2)-Matrizen mit der üblichen Multiplikation $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ ein Monoid bildet. Ist dieses kommutativ?

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe C1.**
  Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

  a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.

b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (3, -2, 4, 2)^T$ die dazugehörige Matrix A. Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).

c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes $W = \mathbb{R}^{6\times 4}$?

(d) (1.5 Punkte) Die Menge der (2×2)-Matrizen versehen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe. Begründen Sie, warum diese gemeinsam mit der üblichen Matrizenmultiplikation $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ einen Ring bildet.

- **Aufgabe C2.**

a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_5 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, \quad x_5 - x_4 = 0, \quad 4x_5 - x_3 = 0 \right\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W.

b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_1-x_2-Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.

- **Aufgabe C3.**

  Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

$$\begin{aligned}(\alpha+2)x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad &= \alpha+4\\ 2x_2 \qquad\qquad &= 4\\ (2\alpha+4)x_1 \qquad\quad + (\alpha+1)x_3 &= 2\alpha+5\end{aligned}$$

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 0 & 0 & \alpha+2\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!

c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A) und dessen Dimension an!