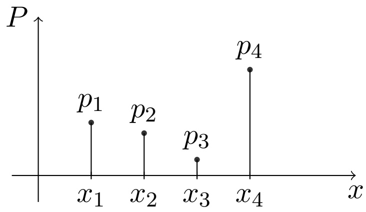
Gruppe A

1. Gegeben Sei eine Kurve
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -2+5t \\ 2+3t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\},$$
sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y + 2x \\ -x\sin y + \mathrm{e}^y \sin y + \mathrm{e}^y \cos y \end{pmatrix}.$$
   (a) Untersuchen Sie, ob $\boldsymbol{F}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{F}$.
   (b) Berechnen Sie
$$\int_C \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x,y,z) = z\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$
und ein Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben durch
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le z \le 4\}.$$
Berechnen Sie $\int_B f\,\mathrm{d}V$ unter der Verwendung von Zylinderkoordinaten.

3. Gegeben ist die Differentialgleichung
$$3x^2y'(x) = 6xy^2 - 4y'(x).$$
Berechnen Sie die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{1}{\ln 4}$.

4. Betrachten Sie die Funktion P in der Abbildung



mit $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = c$, $p_3 = \frac{1}{20}$, $p_4 = \frac{1}{2}$.
   (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion über die diskrete Zufallsvariable X darstellt.
   (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ an und fertigen Sie eine Skizze an.
   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der diskreten Zufallsvariable X für $x_i = i, i = 1, ..., 4$.
   (d) Berechnen Sie $P(X < x_2)$ sowie $P(X \ge x_3)$.

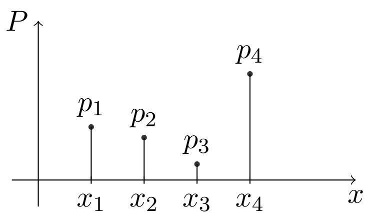
Gruppe B

1. Gegeben Sei eine Kurve
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -2+5t \\ 2+3t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\},$$
sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y + 2x \\ -x \sin y + e^y \sin y + e^y \cos y \end{pmatrix}.$$
   (a) Untersuchen Sie, ob $\boldsymbol{F}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{F}$.
   (b) Berechnen Sie
$$\int_C \boldsymbol{F} \, d\boldsymbol{r}.$$

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x,y,z) = z\, e^{-x^2-y^2},$$
und ein Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben durch
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le z \le 4\}.$$
Berechnen Sie $\int_B f \, dV$ unter der Verwendung von Zylinderkoordinaten.

3. Gegeben ist die Differentialgleichung
$$3x^2 y'(x) = 6xy^2 - 4y'(x).$$
Berechnen Sie die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{1}{\ln 4}$.

4. Betrachten Sie die Funktion P in der Abbildung



mit $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = c$, $p_3 = \frac{1}{20}$, $p_4 = \frac{1}{2}$.
   (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion über die diskrete Zufallsvariable X darstellt.
   (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ an und fertigen Sie eine Skizze an.
   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der diskreten Zufallsvariable X für $x_i = i, i = 1, \ldots, 4$.
   (d) Berechnen Sie $P(X < x_2)$ sowie $P(X \ge x_3)$.