Praktische Mathematik 1 für TPH **2. Klausur** 24.11.2023

# Gruppe A

---

PUNKTEVERTEILUNG:

| Beispiel | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /5 | /8 | /7 |

---

1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = 3z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben. Weiters sei eine Halbkugel $B$ mit dem Mittelpunkt $M = (0,0,0)$ und Radius $r = 5$ für $z \geq 0$ gegeben. Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_B f\,\mathrm{d}V.$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 9y = 2\sin(3t).$$

   (a) Bestimmen Sie das reelle Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$, sowie die reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Bestimmen Sie für die inhomogene Differentialgleichung eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes.

   (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$y(0) = 4, \quad \dot{y}(0) = \frac{17}{3}.$$

3. Betrachten Sie die Funktion $f$ auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi, \\ -x + \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

   (a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf $[-2\pi, 2\pi)$.

   (b) Berechnen Sie für die Fourier-Approximation

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

   die Fourierkoeffizienten $a_0, a_k$ und $b_k$.

# Gruppe B

---

PUNKTEVERTEILUNG:

| Beispiel | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /5 | /8 | /7 |

---

1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y, z) = 5z\sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben. Weiters sei eine Halbkugel $B$ mit dem Mittelpunkt $M = (0, 0, 0)$ und Radius $r = 3$ für $z \geq 0$ gegeben. Berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f \, \mathrm{d}V.$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung
$$\ddot{y} + 16y = -4\cos(4t).$$
   (a) Bestimmen Sie das reelle Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$, sowie die reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Bestimmen Sie für die inhomogene Differentialgleichung eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes.

   (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangswerten
$$y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = 16.$$

3. Betrachten Sie die Funktion $f$ auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi, \\ x - \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$
welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

   (a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf $[-2\pi, 2\pi)$.

   (b) Berechnen Sie für die Fourier-Approximation
$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
   die Fourierkoeffizienten $a_0, a_k$ und $b_k$.