Gruppe A

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\cos(1-x))$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.

2. Gegeben sei $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f auf zwei unterschiedliche Arten, verwenden Sie einmal eine herkömmliche und einmal eine spezielle Substitution.

3. Gegeben sei eine Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t-1 \\ \frac{1}{2}t+10 \end{pmatrix} : t \in [-1,0] \right\},$$

sowie ein Skalarfeld

$$f(x,y) = y^2 \cos y + \mathrm{e}^x + x \sin y,$$

   (a) Berechnen Sie die Tangentialebene $z = T(x,y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (5, 2\pi)$.

   (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ und Länge L der Kurve C.

4. Betrachten Sie das wirbelfreie Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ \frac{x}{y} - z\cos(yz) \\ -y\cos(yz) \end{pmatrix},$$

sowie das dazugehörige Potential

$$\Phi(x,y,z) = x\ln(xy) + C(y,z),$$

mit einer noch unbekannten Funktion $C = C(y,z)$.

   (a) Bestimmen Sie sowohl die fehlende Komponente f_1 als auch das Potential Φ.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes f entlang der Strecke von $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$ nach $(6,5,-1)^{\mathrm{T}}$.

Gruppe B

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(\cosh(1-x))$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.

2. Gegeben sei $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f auf zwei unterschiedliche Arten, verwenden Sie einmal eine herkömmliche und einmal eine spezielle Substitution.

3. Gegeben sei eine Kurve
$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t-5 \\ 3+\frac{1}{5}t \end{pmatrix} : t \in [-1, 0] \right\},$$
sowie ein Skalarfeld
$$f(x,y) = x^2 \cos x + \mathrm{e}^y + y \sin x,$$
   (a) Berechnen Sie die Tangentialebene $z = T(x,y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (2\pi, 5)$.
   (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ und Länge L der Kurve C.

4. Betrachten Sie das wirbelfreie Vektorfeld
$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(xy)+1 \\ \frac{x}{y} - z\cos(yz) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix},$$
sowie das dazugehörige Potential
$$\Phi(x,y,z) = -\sin(yz) + C(x,y),$$
mit einer noch unbekannten Funktion $C = C(x,y)$.
   (a) Bestimmen Sie sowohl die fehlende Komponente f_3 als auch das Potential Φ.
   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes f entlang der Strecke von $(1,4,-1)^{\mathrm{T}}$ nach $(3,8,0)^{\mathrm{T}}$.