

Kernreproduzierende Hilberträume

Michael Kaltenbäck

1 Kernreproduzierende Hilberträumen

In diesem Abschnitt bezeichnet Ω immer eine nichtleere Menge.

1.1 Definition. Ein Hilbertraum H , der linearer Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{K}^\Omega$ versehen mit der punktweisen Addition und skalare Multiplikation ist, heißt *kernreproduzierender Hilbertraum* (englisch: *Reproducing Kernel Hilbert Space*, kurz *RKHS*) auf Ω , falls die Abbildung

$$\varpi_t : \begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{K} \\ f & \mapsto f(t) \end{cases}$$

für alle $t \in \Omega$ auf H stetig bezüglich der von $(\cdot, \cdot)$ induzierten Norm ist.

1.2 Bemerkung. Wegen der punktweisen Definition der Operationen auf H sind die Abbildungen $\varpi_t : H \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Also ist H genau dann ein kernreproduzierender Hilbertraum, wenn $\varpi_t \in H'$ für alle $t \in \Omega$.

In dem Fall ist nach dem Satz von Riesz-Fischer – $\Phi : H \rightarrow H'$ bezeichnet die bekannterweise bijektive und konjugiert lineare Abbildung mit $\Phi(x) = (\cdot, x) - k_t^H := \Phi^{-1}(\varpi_t)$ das eindeutige Element von H derart, dass $f(t) = \varpi_t(f) = (f, k_t^H)$ für alle $f \in H$. Dabei gilt $\|k_t^H\| = \|\varpi_t\|$.

Wenn klar ist, um welchen kernreproduzierenden Hilbertraum es sich handelt, schreibt man auch nur k_t für k_t^H .

1.3 Beispiel. Der Raum $\ell^2(I, \mathbb{K})$ mit einer Indexmenge $I \neq \emptyset$ der quadratisch summierbaren Folgen ist ein kernreproduzierender Hilbertraum für $\Omega = I$. In der Tat sind die Elemente $g \in \ell^2(I)$ nichts anderes als Funktionen von I nach $\mathbb{K}$, wobei $\varpi_j : \ell^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ für $j \in I$ dem Auswerten an der j -ten Stelle gleicht und dieses Auswerten wegen $|g(j)| \leq \|g\|_{\ell^2(I, \mathbb{K})}$ linear und beschränkt ist.

Wegen $(g, \delta_j)_{\ell^2(I, \mathbb{K})} = g(j)$ haben wir $k_j = \delta_j$ für jedes $j \in I$, wobei¹ $\delta_j(i) = \delta_{ij}$.

1.4 Beispiel. Der Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome in der Variablen z vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten betrachtet als Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ versehen mit irgendeinem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ bildet einen kernreproduzierenden Hilbertraum, da die Punktauswertung an einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ linear und auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathbb{C}_n[z]$ beschränkt ist.

¹ δ_{ij} bezeichnet das Kronecker- δ .

1.5 Lemma. Sind H ein kernreproduzierender Hilbertraum auf Ω und die $k_t \in H$, $t \in \Omega$, wie in Bemerkung 1.2, so liegt die lineare Hülle der Funktionen k_t liegen dicht in H , es gilt also $\text{cl span}\{k_t : t \in \Omega\} = H$.

Beweis. Für $f \in (\text{cl span}\{k_t : t \in \Omega\})^\perp = \text{span}\{k_t : t \in \Omega\}^\perp$ gilt $f(t) = (f, k_t) = 0$ für alle $t \in \Omega$; also $f \equiv 0$. $\square$

1.6 Lemma. Seien G ein abstrakter Hilbertraum und $k : \Omega \rightarrow G$ eine Funktion. Für $Z := \text{cl span}\{k(t) : t \in \Omega\}$ und die offenbar lineare Abbildung

$$\psi : G \rightarrow \mathbb{K}^\Omega, \quad \psi(x) = (t \mapsto (x, k(t))_G),$$

gilt $\ker \psi = Z^\perp$. Versehen wir $H := \psi(Z) = \psi(Z \oplus Z^\perp) = \psi(G) \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ so, dass die lineare Bijektion $\psi|_Z : Z \rightarrow H$ isometrisch wird, dann bildet H einen kernreproduzierenden Hilbertraum auf Ω mit

$$k_t^H = \psi(k(t)) \quad \text{und} \quad k_t^H(s) = (k(t), k(s))_G, \quad s, t \in \Omega.$$

Die Abbildung $\psi : G \rightarrow H$ ist linear, kontraktiv und hat auch $Z^\perp$ als Kern.

Beweis. Weil $0 = \psi(x)(t) = (x, k(t))_G$, $t \in \Omega$, zu $x \in \{k(t) : t \in \Omega\}^\perp$ äquivalent ist, gilt $\ker \psi = \{k(t) : t \in \Omega\}^\perp = Z^\perp$. $\psi|_Z : Z \rightarrow H$ ist dann linear und bijektiv, womit $(\cdot, \cdot)_H$ auf H eindeutig durch die Forderung, dass $\psi|_Z : Z \rightarrow H$ unitär ist, definiert ist. Da für $f \in H$ und $t \in \Omega$

$$\begin{aligned} \varpi_t(f) &= f(t) = \psi(\psi|_Z^{-1}(f))(t) = (\psi|_Z^{-1}(f), k(t))_G \\ &= (\psi|_Z^{-1}(f), \psi|_Z^{-1}(\psi|_Z(k(t))))_G = (f, \psi(k(t)))_H, \end{aligned} \quad (1)$$

ist ϖ_t beschränkt und infolge H ein kernreproduzierender Hilbertraum, wobei $k_t^H = \psi(k(t)) = (s \mapsto (k(t), k(s)))_H$. Schließlich ist der Kern von $\psi : G \rightarrow H$ offenbar auch $Z^\perp$ und kann als $\psi|_Z P_Z$ mit der orthogonalen Projektion $P_Z : G \rightarrow Z$ geschrieben werden, weshalb $\psi : G \rightarrow H$ auch kontraktiv ist. $\square$

1.7 Beispiel.

1. Durch $k(w) := (n \mapsto \bar{w}^n)$ wird wegen $\|(n \mapsto \bar{w}^n)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |w|^{2n} = \frac{1}{1-|w|^2} < +\infty$ für $|w| < 1$ eine Funktion $k : \mathbb{D} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ definiert.

Ist $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow H$ die lineare Kontraktion aus Lemma 1.6 mit $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ als G , so stimmt für $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ der Funktionswert $\psi(a)(z) = (a, k(z))_{\ell^2}$ von $\psi(a)$ bei z für alle $z \in \mathbb{D}$ mit dem Grenzwert der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$ überein. Diese Reihe verschwindet für alle $z \in \mathbb{D}$ genau dann, wenn $a = 0 \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$, womit $\ker \psi = \{0\}$ und $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow H$ bijektiv sowie isometrisch ist. Nach Lemma 1.6 folgt $\mathcal{cl} \operatorname{span}\{k(t) : t \in \Omega\} = \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ und

$$H^2(\mathbb{D}) := H = \{\psi(a) : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})\} = \left\{ (z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n) : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}) \right\} \quad (2)$$

bildet einen kernreproduzierenden Hilbertraum, der aus analytischen Funktionen auf $\mathbb{D}$ besteht und *Hardyraum* genannt wird. Die gemäß Bemerkung 1.2 existierenden Funktionen $k_w \in H^2(\mathbb{D})$, $w \in \mathbb{D}$, haben die Gestalt

$$k_w(z) = \psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \bar{w}^n z^n = \frac{1}{1 - z\bar{w}}.$$

Um auf diesem Raum die Möglichkeit, darauf Operatortheorie zu betreiben, zu erahnen, betrachte den Rechtsshift $R : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ definiert durch $R(a)(0) = 0$ und $R(a)(n) = a(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist R eine lineare Isometrie mit Bildbereich $R(\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})) = \{b \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}) : b(0) = 0\}$ von Kodimension eins. Da ψ bijektiv und isometrisch ist, hat auch $M_{\cdot} := \psi \circ R \circ \psi^{-1} : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{D})$ diese Eigenschaften, wobei für $f = \psi(a) \in H^2(\mathbb{D})$ wegen $\psi^{-1}k_z = (n \mapsto \bar{z}^n)$

$$M_{\cdot}(f)(z) = (M_{\cdot}f, k_z)_{H^2(\mathbb{D})} = (Ra, \psi^{-1}k_z)_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z \cdot f(z).$$

Also ist $M_{\cdot}$ der *Multiplikationsoperator* mit der Funktion $z \mapsto z$ und wir haben $M_{\cdot}(H^2(\mathbb{D})) = \psi \circ R(\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})) = \{f \in H^2(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$.

2. Bezeichnet $H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ die Menge aller holomorphen Funktionen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{C}$, so gilt auch

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C}) : \frac{1}{2\pi} \sup_{r \in [0,1)} \int_0^{2\pi} |f(r \exp(it))|^2 dt < +\infty\} \quad (3)$$

und für $f \in H^2(\mathbb{D})$ die Gleichung $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \sup_{r \in [0,1)} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$.

In der Tat wissen wir schon, dass $H^2(\mathbb{D}) \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$. Für $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$, $z \in \mathbb{D}$, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a(n) \in \mathbb{C}$ so, dass diese Potenzreihe Konvergenzradius ≥ 1 hat. Weil diese infolge auf $K_r^{\mathbb{C}}(0)$ für jedes $r \in [0, 1)$ gleichmäßig konvergiert, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a(n)r^n e^{itn} \right) \overline{\left(\sum_{m=0}^N a(m)r^m e^{itm} \right)} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^N a(n)\overline{a(m)} r^{n+m} e^{it(n-m)} dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n,m=0}^N a(n)\overline{a(m)} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |a(n)|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)|^2 r^{2n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (etwa mit Hilfe des Satz von der Monotonen Konvergenz für das Zählmaß auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$) die Gleichheit $\sup_{r \in [0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)|^2$ als Element von $[0, +\infty]$.

Im Fall $f \in H^2(\mathbb{D})$ ist die rechte Seite gemäß (2) endlich und im Fall, dass die linke Seite dieser Gleichung endlich ist, liegt a in $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ und wieder mit (2) folgt $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Mit (3) erhalten wir auch, dass für ein holomorphes $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $|h(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, der *Multiplikationsoperator* $f \mapsto M_h(f) := h \cdot f$ eine lineare Kontraktion von $H^2(\mathbb{D})$ nach $H^2(\mathbb{D})$ abgibt.

3. Anders als beim Hardyraum definieren wir $k : \mathbb{D} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ durch $k(w)(0) = 0$ und $k(w)(n) = \frac{\bar{w}^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ist $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow H$ die lineare Kontraktion aus Lemma 1.6 mit $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ als G , so stimmt für $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ der Funktionswert $\psi(a)(z) = (a, k(z))_{\ell^2}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit dem Grenzwert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} z^n$ überein. Diese Reihe verschwindet für alle $z \in \mathbb{D}$ genau

dann, wenn $a(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, womit $\ker \psi = \text{span}\{\delta_0\}$ und

$${}^{\text{cl}}\text{span}\{k(z) : z \in \mathbb{D}\} = \text{span}\{\delta_0\}^\perp = \{a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) : a(0) = 0\}.$$

Infolge bildet $\psi|_{\{a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) : a(0) = 0\}} : \{a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) : a(0) = 0\} \rightarrow H$ eine lineare, isometrisch Bijektion und

$$\mathcal{D}(\mathbb{D}) := \{\psi(a) : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})\} = \left\{z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} z^n : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})\right\} \quad (4)$$

bildet einen kernreproduzierenden Hilbertraum, der aus analytischen Funktionen auf $\mathbb{D}$ besteht und *Dirichletraum* genannt wird. Die gemäß Bemerkung 1.2 existierenden Funktionen $k_w \in \mathcal{D}$ haben die Gestalt

$$k_w(z) = \psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \bar{w}^n z^n = \log \left(\frac{1}{1 - z\bar{w}} \right)$$

wobei $\log : \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ für die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R} + i(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : \mathbb{R} + i(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ steht.

4. Weiters gilt

$$\mathcal{D}(\mathbb{D}) = \left\{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C}) : f(0) = 0, \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda_2(z) < +\infty\right\} \quad (5)$$

und für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ die Gleichung $\|f\|_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda_2(z)$.

$\mathcal{D}(\mathbb{D}) \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ folgt sofort aus (4). Für $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) z^n$, $z \in \mathbb{D}$, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $b(n) \in \mathbb{C}$ so, dass diese Potenzreihe Konvergenzradius ≥ 1 hat. Dabei gilt für $r \in (0, 1)$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $r\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N nb(n)z^{n-1} \right) \overline{\left(\sum_{m=1}^N mb(m)z^{m-1} \right)} d\lambda_2(z) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} \sum_{n,m=1}^N nm b(n) \overline{b(m)} z^{n-1} \overline{z^{m-1}} d\lambda_2(z) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n,m=1}^N nm b(n) \overline{b(m)} \int_0^r \rho^{n+m-1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt d\rho \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N 2n^2 |b(n)|^2 \int_0^r \rho^{2n-1} d\rho \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n |b(n)|^2 r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n |b(n)|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (etwa mit Hilfe des Satz von der Monotonen Konvergenz für das Zählmaß auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n |b(n)|^2 \in [0, +\infty]. \quad (6)$$

Im Fall $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ gilt $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} z^n$ mit $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$, womit $b(0) = 0$ und $b(n) = \frac{a(n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, die Koeffizienten der Potenzreihe für f abgeben. Die rechte Seite von (6) ist dann gemäß (4) endlich. Im Fall, dass $f(0) = 0$ und die linke Seite von (6) endlich ist, gehört $a : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a(0) = 0$ und $a(n) := b(n) \cdot \sqrt{n}$ zu $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ und wieder mit (4) folgt $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$.

Auch der Dirichletraum lässt interessante operatortheoretische Überlegungen zu. Mit Hilfe von (5) wollen wir zeigen, dass für ein konformes (holomorph und injektiv) $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $h(0) = 0$ der *Kompositionsoperator* $f \mapsto C_h(f) := f \circ h$ eine kontraktive lineare Abbildung aus $L_b(\mathcal{D}(\mathbb{D}))$ abgibt.

In der Tat gilt holomorphiebedingt $\frac{\partial h}{\partial y}(x + iy) = i \frac{\partial h}{\partial x}(x + iy)$, was für h als

Abbildung von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \det dh \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial x}(x + iy) \cdot \frac{\partial \operatorname{Im} h}{\partial y}(x + iy) - \frac{\partial \operatorname{Im} h}{\partial x}(x + iy) \cdot \frac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial y}(x + iy) \\ &= \left(\frac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial x}(x + iy) \right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Im} h}{\partial x}(x + iy) \right)^2 = |h'(x + iy)|^2 \end{aligned}$$

impliziert. Wir erhalten für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$, dass $(f \circ h)(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |(f \circ h)'(z)|^2 d\lambda_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(h(z))|^2 \cdot |h'(z)|^2 d\lambda_2(z) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(h(z))|^2 |\det dh(z)| d\lambda_2(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{h(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 d\lambda_2(w) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 d\lambda_2(w) = \|f\|_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}^2, \end{aligned}$$

womit $f \circ h \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ und das offenbar lineare $C_h : \mathcal{D}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{D})$ auch $\|C_h\| \leq 1$ erfüllt.

1.8 Definition. Für einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ und mit der Notation aus Bemerkung 1.2 nennen wir die Abbildung

$$K_H : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \rightarrow \mathbb{K} \\ (s; t) & \mapsto (k_t^H, k_s^H) = k_t^H(s) \end{cases}$$

die *Kernfunktion* von H . Für $k_t^H \in H$ schreibt man gemäß dieser Festlegung auch $K_H(\cdot, t)$. Wenn klar ist, um welchen kernreproduzierenden Hilbertraum es sich handelt, schreibt man oft nur K für K_H .

1.9 Beispiel. Betrachten wir für einen beliebigen Hilbertraum G die Menge $\Omega := G$ und definieren $k : \Omega \rightarrow G$ durch $k(y) = y$, also $k = \operatorname{id}_G$, so erhalten wir wegen $k(\Omega) = G$ aus Lemma 1.6 einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^G$ und eine lineare und isometrische Bijektion $\psi : G \rightarrow H$, wobei $\psi(x)(y) = (x, y)_G$, $y \in G$, also $\psi(x) = (x, \cdot)$ für jedes $x \in G$. Die Kernfunktion von H ergibt sich durch

$$K_H(x, y) = (k_y^H, k_x^H)_H = (k(y), k(x))_G = (y, x)_G, \quad x, y \in G.$$

1.10 Proposition. Ist $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum und E eine Orthonormalbasis davon, so gilt im Sinne der unbedingten Konvergenz in $\mathbb{K}$

$$K_H(s, t) = \sum_{e \in E} \overline{e(t)} \cdot e(s), \quad s, t \in \Omega.$$

Beweis. Für $t \in \Omega$ gilt im Sinne der unbedingten Konvergenz in H für die Fourierreihe von k_t^H

$$k_t^H = \sum_{e \in E} (k_t^H, e) e = \sum_{e \in E} \overline{e(t)} e.$$

Da die Skalarmultiplikation mit k_s^H mit $s \in \Omega$ beschränkt und linear ist, folgt

$$K_H(s, t) = (k_t^H, k_s^H) = \sum_{e \in E} \overline{e(t)} (e, k_s^H) = \sum_{e \in E} \overline{e(t)} \cdot e(s).$$

□

1.11 Beispiel. Wir betrachten wieder den Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ aus Beispiel 1.7, (1), samt der dort eingeführten linearen und isometrischen Bijektion $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\mathbb{D})$ und $k(w) := (n \mapsto \bar{w}^n) \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$. Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und das dazugehörige $\delta_m \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ mit $\delta_m(n) = \delta_{mn}$ gilt

$$w^m = (\delta_m, k(w))_{\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})} = (\psi(\delta_m), k_w)_{H^2(\mathbb{D})} = \psi(\delta_m)(w).$$

Da $\{\delta_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ abgibt, ist ihr Bild $\{e_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ mit $e_m := \psi(\delta_m) = (z \mapsto z^m)$ unter ψ eine solche von $H^2(\mathbb{D})$. Den schon in Beispiel 1.7, (1), festgestellten Sachverhalt, dass $K_{H^2(\mathbb{D})}(z, w) = k_w(z) = \frac{1}{1 - z\bar{w}}$ erhalten wir nach Proposition 1.10 nochmals:

$$K_{H^2(\mathbb{D})}(z, w) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \overline{e_m(w)} \cdot e_m(z) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \bar{w}^m z^m = \frac{1}{1 - z\bar{w}}.$$

Für Satz 1.13 benötigen wir eine einfache Überlegung.

1.12 Bemerkung. Ist H ein Vektorraum und $(\cdot, \cdot)$ eine hermitesche und positiv semidefinite Sesquilinearform darauf, so wird durch wegen der Linearität im ersten Argument

$$H^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0 \text{ für alle } y \in H\}$$

ein linearer Teilraum von H definiert. Da aus $(x, x) = 0$ unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auch $(x, y) = 0$ für alle $y \in H$ folgt, haben wir $H^\perp = \{x \in H : (x, x) = 0\}$.

Wegen $(x + a, y + b) = (x, y) + (a, y) + (x, b) + (a, b)$ für $x, y \in H$ und $a, b \in H^\perp$ ist auf dem Faktorraum $H/H^\perp$ ist durch

$$([x]_{H^\perp}, [y]_{H^\perp}) := (x, y)$$

ebenfalls eine hermitesche und positiv semidefinite Sesquilinearform definiert. Da $([x]_{H^\perp}, [x]_{H^\perp}) = 0$ sicher $x \in H^\perp$ und weiter $[x]_{H^\perp} = [0]_{H^\perp}$ nach sich zieht, ist $(\cdot, \cdot)$ sogar positiv definit. Also bildet $(H/H^\perp, (\cdot, \cdot))$ einen Skalarproduktraum.

1.13 Satz. *Sei Ω eine nichtleere Menge.*

- *Gilt $K_H = K_L$ für zwei kernreproduzierende Hilberträume $H, L \subseteq \mathbb{K}^\Omega$, so folgt $H = L$ mit übereinstimmenden Skalarprodukten.*
- *Ist H ein kernreproduzierender Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$, so gilt für die dazugehörige Kernfunktion K_H und $K := K_H$, dass $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, sowie*

$$\sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K(t_m, t_n) \geq 0, \quad N \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_N \in \Omega, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}. \quad (7)$$

- *Ist umgekehrt $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion, die $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, und (7) erfüllt, so gibt es einen eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraum $H(K) \subseteq \mathbb{K}^\Omega$, dessen Kernfunktion genau das vorgegebene $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ist.*

Beweis.

- Für die gemäß Bemerkung 1.2 definierten Elemente $k_t^H \in H$ und $k_t^L \in L$, so dass $f(t) = (f, k_t^H)$, $f \in H$, und $g(t) = (g, k_t^L)$, $g \in L$, ist $C := \text{span}\{(k_t^H; k_t^L) : t \in \Omega\}$ ein Unterraum von $H \times L$. Im Fall $K_H = K_L$ gilt für $t_1, \dots, t_N \in \Omega$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$

$$\left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}^H \right\|_H^2 = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K_H(t_m, t_n) = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K_L(t_m, t_n) = \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}^L \right\|_L^2.$$

$T := \mathcal{C}C$ ist folglich der Graph einer linearen und isometrischen Abbildung mit Definitionsbereich $\mathcal{C} \operatorname{span}\{k_t^H : t \in \Omega\} = H$ und Bildbereich $\mathcal{C} \operatorname{span}\{k_t^L : t \in \Omega\} = L$; siehe Lemma 1.5. Dabei gilt für $f \in H$ und $t \in \Omega$

$$(Tf)(t) = (Tf, k_t^L)_L = (Tf, Tk_t^H)_L = (f, k_t^H)_H = f(t).$$

Also haben wir $L = T(H) = H$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^\Omega$ und $T = \operatorname{id}_H$.

- Ist H ein kernreproduzierender Hilbertraum und $K := K_H$ die dazugehörige Kernfunktion, so gilt $K(s, t) = (k_t, k_s) = \overline{(k_s, k_t)} = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, und für $N \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_N \in \Omega$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$

$$\sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K(t_m, t_n) = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n (k_{t_n}, k_{t_m}) = \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}, \sum_{m=1}^N \lambda_m k_{t_m} \right) \geq 0.$$

- Sei umgekehrt $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften. Wir versehen $c_{00}(\Omega, \mathbb{K})$ mit der Sesquilinearform

$$(\alpha, \beta) := \sum_{s,t \in \Omega} \overline{\beta(s)} \alpha(t) K(s, t), \quad \alpha, \beta \in c_{00}(\Omega, \mathbb{K}).$$

Da die Menge aller Paare $(s; t) \in \Omega \times \Omega$, für die die Summanden auf der rechten Seite nicht verschwindet, endlich ist, haben wir (α, β) wohldefiniert. Zudem ist die rechte Seite offenbar linear in α und konjugiert linear in β , wodurch sich die Abbildung $(\cdot, \cdot) : c_{00}(\Omega, \mathbb{K}) \times c_{00}(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ als Sesquilinearform herausstellt. Aus $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$ erhalten wir, dass $(\cdot, \cdot)$ hermitesch ist, und aus (7) folgt

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{s,t \in \Omega} \overline{\alpha(s)} \alpha(t) K(s, t) \geq 0,$$

weshalb sich $(\cdot, \cdot)$ auch als positiv semidefinit erweist. Wie wir in Bemerkung 1.12 gesehen haben, bildet dann $(c_{00}(\Omega, \mathbb{K})/c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp, (\cdot, \cdot))$ einen Skalarproduktraum, wenn wir $([\alpha]_{c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp}, [\beta]_{c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp}) = (\alpha, \beta)$ setzen.

Wir bezeichnen mit $(G, (\cdot, \cdot)_G)$ eine Hilbertraum-Vervollständigung von $(c_{00}(\Omega, \mathbb{K})/c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp, (\cdot, \cdot))$ und definieren $k : \Omega \rightarrow G$ durch $k(t) := [\delta_t]_{c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp}$, wobei $\delta_t(s) = \delta_{st}$ und daher $\delta_t \in c_{00}(\Omega, \mathbb{K})$.

Die lineare Hülle der δ_t ergibt genau $c_{00}(\Omega, \mathbb{K})$ und folglich die von $\{k(t) : t \in \Omega\}$ genau $c_{00}(\Omega, \mathbb{K})/c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp$, womit diese in G dicht ist. Der gemäß Lemma 1.6 zu G vermöge der Abbildung $\psi : G \rightarrow H$ mit $\psi(x) := (t \mapsto (x, k(t))_G)$ isometrisch isomorphe kernreproduzierende Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ mit Kernfunktion K_H erfüllt für $s, t \in \Omega$

$$\begin{aligned} K_H(s, t) &= (k_t, k_s)_H = ([\delta_t]_{c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp}, [\delta_s]_{c_{00}(\Omega, \mathbb{K})^\perp})_G \\ &= (\delta_t, \delta_s) = \sum_{u, v \in \Omega} \overline{\delta_s(u)} \delta_t(v) K(u, v) = K(s, t). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der ersten Aussage des aktuellen Satzes. □

1.14 Bemerkung. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erkennt man unschwer, dass aus (7) alleine schon $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$ folgt. In der Tat bildet für feste $N \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_N \in \Omega$ die Abbildung $((\alpha_n)_{n=1}^N; (\beta_n)_{n=1}^N) \mapsto \sum_{m,n=1}^N \bar{\beta}_m \alpha_n K(t_m, t_n)$ wegen (7) eine positiv semidefinite Sesquilinearform, welche nach der Polarisationsformel auch hermitesch ist, und daher $K(t_m, t_n) = \overline{K(t_n, t_m)}$.

1.15 Beispiel. Seien Ω eine nichtleere Menge und $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Die Abbildung $K(s, t) := \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)}$ erfüllt offenbar $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$. Für $t_1, \dots, t_N \in \Omega$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ gilt zudem

$$\sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K(t_m, t_n) = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n \cdot \phi(t_m) \cdot \overline{\phi(t_n)} = \left| \sum_{n=1}^N \lambda_n \overline{\phi(t_n)} \right|^2 \geq 0,$$

womit es nach Satz 1.13 einen eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ mit $K_H = K$ gibt. Im Fall $\phi = 0$ gilt offenbar $H = \{0\}$.

Im Fall $\phi \neq 0$ versehen wir den eindimensionalen Unterraum $\text{span}\{\phi\}$ von $\mathbb{K}^\Omega$ mit dem Skalarprodukt $(\alpha\phi, \beta\phi) := \alpha\bar{\beta}$, sodass $\|\phi\|^2 = (\phi, \phi) = 1$. Da $\text{span}\{\phi\}$ endlichdimensional ist, sind alle linearen Funktionale und infolge alle Punktauswertungen stetig, womit $\text{span}\{\phi\}$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum abgibt. Wegen

$$(\alpha\phi)(t) = (\alpha\phi, \overline{\phi(t)} \cdot \phi)$$

gilt $k_t^{\text{span}\{\phi\}} = \overline{\phi(t)} \cdot \phi$ und infolge $K_{\text{span}\{\phi\}}(s, t) = \overline{\phi(t)} \cdot \phi(s) = K(s, t) = K_H(s, t)$. Also muss $H = \text{span}\{\phi\}$ gelten.

Umgekehrt folgt aus Proposition 1.10, dass für jeden eindimensionalen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ und $\phi \in H$ mit $\|\phi\| = 1$ immer $K_H(s, t) = \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)}$.

1.16 Beispiel. Für $\Omega := \{1, \dots, n\}$ und eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erfüllt $K(i, j) := b_{ij}$ die zweite Aussage von Satz 1.13, weshalb $K = K_H$ für einen eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega \simeq \mathbb{K}^n$. Nach dem letzten Beweisteil von Satz 1.13 ist H isometrisch isomorph zu $c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) / c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K})^\perp$, wobei $c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ mit der positiv semidefiniten Sesquilinearform

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} \overline{\beta(i)} \alpha(j) b_{ij} = \beta^* B \alpha, \quad \alpha, \beta \in c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n,$$

verstanden ist und wobei $c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K})^\perp = \{\alpha \in c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) : (\alpha, \beta) = 0, \beta \in c_{00}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K})\} \simeq \ker B$. Also hat H die Dimension $n - \dim \ker B$.

2 Kernreproduzierende Hilberträume und Machine Learning

Zunächst behandeln wir eine Fragestellung, die am ersten Blick nichts mit kernreproduzierenden Hilberträumen zu tun hat und verwandt mit der Bestimmung von Regressionsgeraden durch eine vorgegebene Menge von Messpunkten ist.

1. Wir starten mit einem abstrakten Hilbertraum G über $\mathbb{R}$ und einer endlichen Teilmenge von G , die in zwei Typen – etwa rote und blaue Punkte – aufgeteilt ist, und wollen eine abgeschlossene Hyperebene L in G derart finden, dass “möglichst viele” der roten Punkte auf der einen Seite von L und “möglichst viele” der blauen Punkte auf der anderen Seite von L zu liegen kommen. “möglichst viele” ist hier ein heuristischer Begriff und bedarf der richtigen mathematischen Interpretation, um auf konkrete Fragestellungen bei der Verarbeitung von Daten eine befriedigende Lösung zu erhalten.

Seien also $x_1, \dots, x_p \in G$, wobei jeder Punkt eine von zwei Farben – beispielsweise rot und blau – hat, was wir mit Vorzeichen $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \{-1, +1\}$ ausdrücken wollen, wobei wir x_j als rot bezeichnen, wenn $\lambda_j = +1$, und als

blau, wenn $\lambda_j = -1$. Da die abgeschlossenen Hyperebenen in G genau die Kerne von $f \in G' \setminus \{0\}$ und $\{x \in G : f(x) > 0\}$ sowie $\{x \in G : f(x) < 0\}$ die beiden dazugehörigen offenen Halbräume in G sind, suchen wir $f \in G' \setminus \{0\}$ so, dass $\lambda_j f(x_j) > 0$ für “möglichst viele” $j \in \{1, \dots, p\}$.

Wegen $\ker f = \ker(\alpha f)$ für $f \in G'$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bedeutet das die Suche nach $f \in G' \setminus \{0\}$ so, dass $\lambda_j f(x_j) > 1$ bzw. $1 - \lambda_j f(x_j) < 0$ für “möglichst viele” $j \in \{1, \dots, p\}$.

Eine eventuell brauchbare Interpretation von “möglichst viele” ist,

$$\chi(f) := \sum_{j=1}^p \max(1 - \lambda_j f(x_j), 0)$$

für $f \in H'$ möglichst klein zu machen. Im Allgemeinen gilt hier leider $\chi(f) \neq \chi(\alpha f)$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, was zu unerwünschten Effekten führt. Eine zielführendere Vorgangsweise ist es, nicht $\chi(f)$ sondern $\chi(f) + w(\|f\|^2)$ mit einer geeigneten monoton wachsenden Funktion $w : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zu minimieren. Nicht in allen Fällen existiert ein diesbezüglich minimales $g \in G'$, welches also

$$\chi(g) + w(\|g\|^2) \leq \chi(f) + w(\|f\|^2), \quad f \in G',$$

erfüllt. Meist ist das aber gar nicht nötig und man sucht ein $g \in G'$, sodass $\chi(g) + w(\|g\|^2)$ hinreichend klein wird.

2. Im Allgemeinen will man etwa für eine Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^d$ Punkte $t_1, \dots, t_p \in \Omega$, die wieder blau und rot gefärbt sind, was abermals durch Vorzeichen $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \{-1, +1\}$ dargestellt wird, nicht nur durch eine Hyperebenen, sondern durch irgendeine Art von Hyperfläche in zwei Hälften teilen. Man denke beispielsweise an ein unscharfes schwarz-weiss Bild $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und das Problem, darauf zwischen Licht und Schatten eine Trennlinie zu ziehen.

Abhängig vom gewünschten Aussehen dieser Kurve wählt man dafür einen Hilbertraum G samt geeigneter Abbildung $k : \Omega \rightarrow G$ derart, dass sich das Bild $\{k(t_j) : j \in \{1, \dots, p\}, \lambda_j = +1\}$ der roten Punkte vom Bild $\{k(t_j) : j \in \{1, \dots, p\}, \lambda_j = -1\}$ der blauen Punkte durch eine Hyperebene wie oben beschrieben hinreichend gut trennen lassen.

Dazu setzen wir $x_j := k(t_j)$, $j = 1, \dots, p$, und bemühen die Überlegungen von oben. Ist $g \in G'$ eine Minimalstelle von $f \mapsto \chi(f) + w(\|f\|^2)$ oder zumindest so, dass $\chi(g) + w(\|g\|^2)$ hinreichend klein ist, dann ergibt das durch

$$\Omega_{\pm} = \{t \in \Omega : \pm f(k(t)) > 0\} \quad \text{und} \quad \Omega_0 = \{t \in \Omega : f(k(t)) = 0\}$$

eine Aufteilung von Ω , wobei Ω_+ den Großteil von $\{t_j : j \in \{1, \dots, p\}, \lambda_j = +1\}$ und Ω_- den Großteil von $\{t_j : j \in \{1, \dots, p\}, \lambda_j = -1\}$ enthalten sollte und Ω_0 die dazugehörige Grenzfläche abgibt.

Um den Aufwand bei der Bestimmung geeigneter (des Minimalen) $g \in G'$ nicht explodieren zu lassen, dient das folgende sogenannte Representer Theorem. Davor wollen wir daran erinnern, dass nach dem Satz von Riesz-Fischer jedes $f \in G'$ in der Form $f = f_u := (., u)_G$ mit einem eindeutigen $u \in G$, welches auch $\|f_u\| = \|u\| = \sqrt{(u, u)_G}$ erfüllt, dargestellt werden kann und umgekehrt.

2.1 Satz. Seien Ω eine nichtleere Menge, G ein Hilbertraum, $k : \Omega \rightarrow G$ eine Funktion und $t_1, \dots, t_p \in \Omega$. Weiters sei $w : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion – etwa die durch eine Colourierung $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \{-1, +1\}$ bestimmte Funktion $F(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{j=1}^p \max(1 - \lambda_j \alpha_j, 0)$. Schließlich setzen wir $\chi(f) := F(f(k(t_1)), \dots, f(k(t_p)))$ für $f \in G'$.

Zu jedem $u \in G$ gibt es dann ein $v \in \text{span}\{k(t_1), \dots, k(t_p)\}$ mit

$$\chi(f_v) + w(\|f_v\|^2) \leq \chi(f_u) + w(\|f_u\|^2),$$

womit es im Fall der Existenz von $\min_{u \in G} \chi(f_u) + w(\|f_u\|^2)$ immer ein $v \in \text{span}\{k(t_1), \dots, k(t_p)\}$ mit $\chi(f_v) + w(\|f_v\|^2) = \min_{u \in G} \chi(f_u) + w(\|f_u\|^2)$ gibt.

Beweis. Die Verifizierung dieses Satzes ist kürzer als seine Formulierung. Bezeichnet nämlich $P : G \rightarrow G$ die orthogonale Projektion auf den endlichdimensionalen und folglich abgeschlossenen Unterraum $\text{span}\{k(t_1), \dots, k(t_p)\}$, so erhalten wir für $v = Pu$ bei gegebenem $u \in G$

$$f_v(k(t_j)) = (k(t_j), Pu)_G = (k(t_j), u)_G = f_u(k(t_j))$$

$$\text{und } \|v\|_G^2 = \|Pu\|_G^2 \leq \|Pu\|_G^2 + \|(I - P)u\|_G^2 = \|u\|_G^2,$$

womit auch $\chi(f_v) + w(\|f_v\|^2) \leq \chi(f_u) + w(\|f_u\|^2)$. □

Um ein $v \in G$ mit hinreichend kleinem (minimalen) $\chi(f_v) + w(\|f_v\|^2)$ zu finden, können wir diese Suche also auf $v \in \text{span}\{k(t_1), \dots, k(t_p)\}$ bzw. $v = \sum_{j=1}^p \alpha_j k(t_j)$ beschränken. Hier kommen auch die kernreproduzierenden Hilberträume ins Spiel. Gemäß Lemma 1.6 gibt es nämlich einen kernreproduzierenden Hilbertraum H und eine lineare und isometrische Bijektion $\psi : \mathcal{C}\ell \text{span}\{k(t) : t \in \Omega\} \rightarrow H$ mit $\psi(x)(t) = (x, k(t))_G$ und $\psi(k(t)) = k_t^H$, $t \in \Omega$. Für $v = \sum_{j=1}^p \alpha_j k(t_j)$ gilt dann

$$\|v\|_G^2 = \left\| \sum_{j=1}^p \alpha_j k_{t_j}^H \right\|_H^2 = \sum_{m,n=1}^p \alpha_m \alpha_n K_H(t_m, t_n)$$

und

$$f_v(k(t_i)) = (k(t_i), v)_G = (k_{t_i}^H, \sum_{j=1}^p \alpha_j k_{t_j}^H)_H = \sum_{j=1}^p \alpha_j K_H(t_j, t_i),$$

womit es gilt

$$\begin{aligned} \chi(f_v) + w(\|f_v\|^2) &= F(f_v(k(t_1)), \dots, f_v(k(t_p))) + w(\|f_v\|^2) \\ &= F\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j K_H(t_j, t_1), \dots, \sum_{j=1}^p \alpha_j K_H(t_j, t_p)\right) + w\left(\sum_{m,n=1}^p \alpha_m \alpha_n K_H(t_m, t_n)\right) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T \in \mathbb{R}^p$ minimal bzw. hinreichend klein zu machen. Kennt man F und w sowie K_H – bzw. wählt man G und ψ so, dass sich eine vorgegebene Kernfunktion K_H ergibt –, so bedeutet das ein Problem aus der Linearen Algebra zu lösen, welches numerisch bewältigbar scheint.

Die Bestimmung von f_v mit hinreichend kleinem (minimalen) $\chi(f_v) + w(\|f_v\|^2)$ ohne Satz 2.1 bedeutet dagegen ein Rechnen in G , was für im Vergleich zu p großem $\dim G$ (möglichweise hat man sogar $\dim H = \infty$) viel aufwendiger ist.

3 Manipulationen von Kernfunktionen

Wir bringen eine Reihe von Anwendungen der Überlegungen aus Lemma 1.6.

3.1 Fakta. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ seien Ω, Λ nichtleere Mengen.

1. Seien $G \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum und $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Wir setzen $k(t) := \overline{\phi(t)} \cdot k_t^G$, wenden Lemma 1.6 an und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt surjektiver linearer Abbildung $\psi_\phi : G \rightarrow H$. Wegen

$$\psi_\phi(f)(s) = (f, \overline{\phi(s)} \cdot k_s^G)_G = \phi(s) \cdot f(s), \quad s \in \Omega,$$

ist ψ_ϕ die Einschränkung der Multiplikationsabbildung $\mathbb{K}^\Omega \ni h \mapsto \phi \cdot h \in \mathbb{K}^\Omega$, wobei $H = \psi_\phi(G) = \{\phi \cdot f : f \in G\}$ sowie $\ker \psi_\phi = \{\overline{\phi(t)} \cdot k_t^G : t \in \Omega\}^\perp = \{f \in G : \phi \cdot f = 0\}$. Des weiteren haben wir

$$K_H(s, t) = k_t^H(s) = \psi_\phi(\overline{\phi(t)} \cdot k_t^G)(s) = \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)} \cdot k_t^G(s) = \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)} \cdot K_G(s, t).$$

2. Seien $L \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ein kernreproduzierender Hilbertraum und $\varphi : \Omega \rightarrow \Lambda$ eine Funktion. Wir setzen $k(t) = k_{\varphi(t)}^L \in L$, $t \in \Omega$, wenden Lemma 1.6 mit L als G an und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt surjektiver linearer Abbildung $\psi : L \rightarrow H$ mit

$$\psi(f)(t) = (f, k_{\varphi(t)}^L)_L = f(\varphi(t)), \quad t \in \Omega, f \in L.$$

Folglich gilt $H = \psi(L) = \{f \circ \varphi : f \in L\}$, ψ ist auf $\mathcal{cl} \operatorname{span}\{k_{\varphi(t)}^L : t \in \Omega\}$ isometrisch und $\ker \psi = \{k_{\varphi(t)}^L : t \in \Omega\}^\perp = \{f \in L : f(\varphi(\Omega)) = \{0\}\}$. Zudem haben wir $k_t^H(s) = \psi(k_{\varphi(t)}^L)(s) = k_{\varphi(t)}^L(\varphi(s))$. Die Kernfunktion K_H von H steht daher über $K_H = K_L \circ (\varphi \times \varphi)$ in Verbindung mit der von L , wobei $\varphi \times \varphi : \Omega \times \Omega \rightarrow \Lambda \times \Lambda$ durch $(\varphi \times \varphi)(s, t) := (\varphi(s), \varphi(t))$ definiert ist.

3. Betrachten wir im Fall $\Omega \subseteq \Lambda$ die Einbettungsabbildung $\varphi : \Omega \rightarrow \Lambda$ mit $\varphi(t) = t$, so gilt im vorherigen Punkt $\psi(f) = f|_\Omega$ und $\ker \psi = \{k_t^L : t \in \Omega\}^\perp = \{f \in L : f(\Omega) = \{0\}\}$ für die surjektive, lineare und auf $\mathcal{cl} \operatorname{span}\{k_t^L : t \in \Omega\}$ isometrische Abbildung $\psi : L \rightarrow H$ sowie $K_H = K_L|_{\Omega \times \Omega}$.
4. Die Überlegungen in 2 lassen sich verallgemeinern. Dazu seien $L \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ein kernreproduzierender Hilbertraum und $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}(\Lambda)$, wobei $\mathcal{E}(\Lambda)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von Λ bezeichnet. Durch $k(t) = \sum_{\lambda \in \varphi(t)} k_\lambda^L$ ist eine Funktion $k : \Omega \rightarrow L$ definiert. Wir wenden Lemma 1.6 auf L statt

G an und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt surjektiver linearer Abbildung $\psi : L \rightarrow H$ mit

$$\psi(f)(t) = (f, \sum_{\lambda \in \varphi(t)} k_\lambda^L)_L = \sum_{\lambda \in \varphi(t)} f(\lambda), \quad t \in \Omega, f \in L,$$

sowie

$$K_H(s, t) = k_t^H(s) = \psi\left(\sum_{\lambda \in \varphi(t)} k_\lambda^L\right)(s) = \sum_{\mu \in \varphi(s)} \sum_{\lambda \in \varphi(t)} k_\lambda^L(\mu) = \sum_{\mu \in \varphi(s), \lambda \in \varphi(t)} K_L(\mu, \lambda).$$

5. Ist $G \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein weiterer kernreproduzierender Hilbertraum und ist H ein bezüglich der Hilbertraumtopologie abgeschlossener Teilraum, so sind auch $H, H^\perp \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ kernreproduzierende Hilberträume, da beim Einschränken der Punktauswertungsfunktonale die Stetigkeit erhalten bleibt. Wegen $f(t) = (f, k_t^G) = (f, P_H k_t^G)$ für $f \in H$ und $t \in \Omega$ gilt $k_t^H = P_H k_t^G$ und entsprechend $k_t^{H^\perp} = (I - P_H)k_t^G$, womit auch

$$K_G(s, t) = (k_t^G, k_s^G) = (k_t^H, k_s^H) + (k_t^{H^\perp}, k_s^{H^\perp}) = K_H(s, t) + K_{H^\perp}(s, t), \quad s, t \in \Omega.$$

6. Sind $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ kernreproduzierende Hilberträume, so betrachten wir die Abbildung $k : \Omega \rightarrow H_1 \times H_2$ definiert durch $k(t) = (k_t^{H_1}, k_t^{H_2})$. Wenden wir Lemma 1.6 mit $H_1 \times H_2$ als G an, so erhalten wir einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt linearer Kontraktion $\psi : H_1 \times H_2 \rightarrow H$ mit

$$\psi(f_1; f_2)(t) = ((f_1; f_2), (k_t^{H_1}; k_t^{H_2})) = f_1(t) + f_2(t), \quad t \in \Omega, \quad (8)$$

für $(f_1; f_2) \in H_1 \times H_2$. Insbesondere gilt $H = \psi(H_1 \times H_2) = \{f_1 + f_2 : f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\}$, ψ ist auf $c\ell \operatorname{span}\{(k_t^{H_1}; k_t^{H_2}) : t \in \Omega\}$ isometrisch und

$$\ker \psi = \{(k_t^{H_1}; k_t^{H_2}) : t \in \Omega\}^\perp = \{(f_1; f_2) \in H_1 \times H_2 : f_1 = -f_2\}.$$

Wegen (8) gilt $H_1 + H_2 = H$ als Teilräume von $\mathbb{K}^\Omega$, wobei $H_1 \ni f_1 \mapsto \psi(f_1; 0) \in H$ und $H_2 \ni f_2 \mapsto \psi(0; f_2) \in H$ die entsprechenden Einbettungsabbildungen abgeben, welche somit linear und kontraktiv sind.

Im Fall $\ker \psi = \{0\}$ gilt $H_1 \times H_2 = \ker \psi^\perp = c\ell \operatorname{span}\{(k_t^{H_1}; k_t^{H_2}) : t \in \Omega\}$, womit ψ eine isometrische Bijektion ist und folglich $H_1 \oplus H_2 = H$ als Hilberträume gilt. Im Fall $\ker \psi \neq \{0\}$ ist $H_1 + H_2 = H$ nicht einmal eine direkte Summe.

Schließlich gilt $k_t^H = \psi(k_t^{H_1}; k_t^{H_2}) = k_t^{H_1} + k_t^{H_2}$ und

$$K_H(s, t) = k_t^H(s) = k_t^{H_1}(s) + k_t^{H_2}(s) = K_{H_1}(s, t) + K_{H_2}(s, t).$$

7. Wir wenden für nichtleere Ω_1, Ω_2 und kernreproduzierende Hilberträume $H_1 \subseteq \mathbb{K}^{\Omega_1}$ und $H_2 \subseteq \mathbb{K}^{\Omega_2}$ Lemma 1.6 auf $H_1 \times H_2$ als G , $\Omega_1 \cup \Omega_2$ als Ω und $k : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow H_1 \times H_2$ definiert durch $k(t) = (k_t^{H_1}; 0)$ für $t \in \Omega_1$ und $k(t) = (0; k_t^{H_2})$ für $t \in \Omega_2$ an. Weil

$$\text{span}\{k(t) : t \in \Omega_1 \cup \Omega_2\} = (\text{span}\{k_{t_1}^{H_1} : t_1 \in \Omega_1\}) \times (\text{span}\{k_{t_2}^{H_2} : t_2 \in \Omega_2\})$$

einen dichten Teilraum von $H_1 \times H_2$ abgibt, ist die enthaltende lineare und surjektive Abbildung $\psi : H_1 \times H_2 \rightarrow H$ sogar eine isometrische Bijektion, wobei

$$\psi(f_1; f_2)(t) = \begin{cases} (f_1, k_t^{H_1}) = f_1(t), & t \in \Omega_1, \\ (f_2, k_t^{H_2}) = f_2(t), & t \in \Omega_2, \end{cases}$$

also $\psi(f_1; f_2)(t) = \mathbb{1}_{\Omega_1}(t)f_1(t) + \mathbb{1}_{\Omega_2}(t)f_2(t)$ für $f_1 \in H_1, f_2 \in H_2$ und $t \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Somit gilt $k_t^H = \psi(k(t)) = (s \mapsto \mathbb{1}_{\Omega_1}(s)k_t^{H_1}(s))$ für $t \in \Omega_1$ und $k_t^H = \psi(k(t)) = (s \mapsto \mathbb{1}_{\Omega_2}(s)k_t^{H_2}(s))$ für $t \in \Omega_2$ sowie für die Kernfunktion K_H von H ($s, t \in \Omega_1 \cup \Omega_2$)

$$K_H(s, t) = k_t^H(s) = \mathbb{1}_{\Omega_1}(s)\mathbb{1}_{\Omega_1}(t) \cdot K_{H_1}(s, t) + \mathbb{1}_{\Omega_2}(s)\mathbb{1}_{\Omega_2}(t) \cdot K_{H_2}(s, t).$$

Sind Ω_1 und Ω_2 disjunkte Kopien der Menge Ω samt Bijektionen $\Omega \ni t \mapsto t_1 \in \Omega_1$ und $\Omega \ni t \mapsto t_2 \in \Omega_2$ und nennen wir den soeben erhaltenen kernreproduzierenden Hilbertraum H auf $\Omega_1 \cup \Omega_2$ um in L , so können wir die Überlegungen aus 4 mit $\varphi(t) = \{t_1, t_2\}$ anwenden und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum H auf Ω mit Kernfunktion

$$\begin{aligned} K_H(s, t) &= \sum_{k,l=1}^2 \mathbb{1}_{\Omega_1}(s_k)\mathbb{1}_{\Omega_1}(t_l) \cdot K_{H_1}(s_k, t_l) + \mathbb{1}_{\Omega_2}(s_k)\mathbb{1}_{\Omega_2}(t_l) \cdot K_{H_2}(s_k, t_l) \\ &= K_{H_1}(s_1, t_1) + K_{H_2}(s_2, t_2) \end{aligned}$$

und damit denselben Raum wie in 6.

²Auch wenn $f_1(s)$ für $s \in \Omega_2$ und $f_2(t)$ für $t \in \Omega_1$ nicht definiert sind, wir verstehen dann unter $\mathbb{1}_{\Omega_1}(s)f_1(s)$ sowie unter $\mathbb{1}_{\Omega_2}(t)f_2(t)$ die Zahl $0 \in \mathbb{K}$.

8. Wir können die Überlegungen in 6 noch um einiges verallgemeinern. Dazu sei I eine weitere nichtleere Mengen, seien $(H_i, (\cdot, \cdot)_i)$, $i \in I$, kernreproduzierende Hilberträume über demselben Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und über derselben Menge Ω und sei $\ell^2(I, (H_i)_{i \in I})$ der entsprechende Hilbertraum, wobei wir der Übersicht halber die Elemente von $\ell^2(I, (H_i)_{i \in I})$ als Tupel $(f_i)_{i \in I}$ anschreiben. Weiters sei $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ mit der Eigenschaft, dass $(\alpha_i \cdot k_t^{H_i})_{i \in I}$ für jedes $t \in \Omega$ in $\ell^2(I, (H_i)_{i \in I})$ enthalten ist, also dass

$$\sum_{i \in I} \|\alpha_i \cdot k_t^{H_i}\|_{H_i}^2 = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 K_{H_i}(t, t) < +\infty, \quad t \in \Omega.$$

Wir betrachten die Abbildung $k : \Omega \rightarrow \ell^2(I, (H_i)_{i \in I})$ definiert durch $k(t) = (\bar{\alpha}_i \cdot k_t^{H_i})_{i \in I}$, wenden Lemma 1.6 auf $\ell^2(I, (H_i)_{i \in I})$ statt G an und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt linearer Kontraktion $\psi : \ell^2(I, (H_i)_{i \in I}) \rightarrow H$ mit

$$\psi((f_i)_{i \in I})(t) = ((f_i)_{i \in I}, (\bar{\alpha}_i \cdot k_t^{H_i})_{i \in I})_{\ell^2} = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(t). \quad (9)$$

Insbesondere gilt $H = \psi(\ell^2(I, (H_i)_{i \in I})) = \{(t \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot f_i(t)) : (f_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, (H_i)_{i \in I})\}$, ψ ist auf $\text{cl span}\{k(t) : t \in \Omega\}$ isometrisch und

$$\ker \psi = \text{span}\{k(t) : t \in \Omega\}^\perp = \{(f_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, (H_i)_{i \in I}) : \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(t) = 0, t \in \Omega\}.$$

Schließlich gilt $k_t^H = \psi((\bar{\alpha}_i \cdot k_t^{H_i})_{i \in I}) = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 k_t^{H_i} (\in \mathbb{K}^\Omega)$ und daher

$$K_H(s, t) = k_t^H(s) = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 K_{H_i}(s, t).$$

3.2 Beispiel. Sei $H_1 \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum. Weiters sei $0 \neq \phi \in \mathbb{K}^\Omega$ und bezeichne $K_{H_2}(s, t) = \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)}$ die Kernfunktion des Hilbertraumes $H_2 := \text{span}\{\phi\}$ mit $(\alpha\phi, \beta\phi) = \alpha\bar{\beta}$ gemäß Beispiel 1.15.

Nach Fakta 3.1, 6, ist $K_{H_1} + K_{H_2}$ die Kernfunktion eines eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraumes $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$, wobei

$$H = \{f_1 + \alpha\phi : f_1 \in H_1, \alpha \in \mathbb{K}\} = H_1 + \text{span}\{\phi\}$$

als Unterraum von $\mathbb{K}^\Omega$. Genau im Fall $\phi \notin H_1$ haben wir $H = H_1 \oplus \text{span}\{\phi\}$ mit $\|\phi\|_H = \|\phi\|_{H_2} = 1$.

Im Fall $\phi \in H_1$ bildet $Q := \text{span}\{\phi\}$ versehen mit $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ einen eindimensionalen Hilbertraum, wodurch $K_Q(s, t) = \frac{1}{\|\phi\|_{H_1}^2} \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)}$; siehe Beispiel 1.15. Nach Fakta 3.1, 5, gilt daher $K_{H_1} = K_Q + K_{Q^\perp}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} K_{H_1}(s, t) + K_{H_2}(s, t) &= K_{Q^\perp}(s, t) + K_Q(s, t) + K_{H_2}(s, t) \\ &= K_{Q^\perp}(s, t) + \frac{\|\phi\|_{H_1}^2 + 1}{\|\phi\|_{H_1}^2} \phi(s) \cdot \overline{\phi(t)} \\ &= K_{Q^\perp}(s, t) + \tilde{\phi}(s) \cdot \overline{\tilde{\phi}(t)}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\phi} = \frac{\sqrt{\|\phi\|_{H_1}^2 + 1}}{\|\phi\|_{H_1}} \phi$. Wegen $\phi \notin Q^\perp$ gilt $H = Q^\perp \oplus \text{span}\{\tilde{\phi}\}$ mit $\|\tilde{\phi}\|_H = 1$ gemäß dem ersten behandelten Fall. Infolge gilt $H = H_1$ als Unterraum von $\mathbb{K}^\Omega$ und $\|\phi\|_H = \frac{\|\phi\|_{H_1}}{\sqrt{\|\phi\|_{H_1}^2 + 1}}$.

3.3 Beispiel. Sei $H^2(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^\mathbb{D}$ der in Beispiel 1.7, (1), konstruierte Hardyraum, der als kernreproduzierender Hilbertraum die Kernfunktion $K_{H^2(\mathbb{D})}(z, w) = \frac{1}{1 - z\bar{w}}$ hat, und sei $\varphi : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{D}$ die bijektive Funktion

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Gemäß Fakta 3.1, 2, bildet dann $H := \{f \circ \varphi : f \in H^2(\mathbb{D})\}$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum und für das lineare $\psi : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H$ mit $\psi(f) = f \circ \varphi$ gilt $\ker \psi = \{f \in H^2(\mathbb{D}) : f \circ \varphi = 0\} = \{0\}$, weshalb ψ bijektiv und isometrisch ist. Weiters gilt

$$K_H(z, w) = K_{H^2(\mathbb{D})}(\varphi(z), \varphi(w)) = \frac{(z + i)\overline{(w + i)}}{2i(\bar{w} - z)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^+.$$

Wenden wir Fakta 3.1, 1, für $\phi : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)}$ auf $G := H$ an, so erhalten wir einen kernreproduzierenden Hilbertraum (Hardyraum auf der oberen Halbebene)

$$H^2(\mathbb{C}^+) := \{\phi \cdot f : f \in H\} = \{\phi \cdot (f \circ \varphi) : f \in H^2(\mathbb{D})\}$$

und eine wegen $\{f \in H : \phi \cdot f = 0\} = \{0\}$ lineare und isometrische Bijektion $\psi_\phi : H \rightarrow H^2(\mathbb{C}^+)$ mit $\psi_\phi(f) = \phi \cdot f$. Folglich ist $\psi_\phi \circ \psi : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}^+)$ auch eine lineare und isometrische Bijektion mit $\psi_\phi \circ \psi(f) = \phi \cdot (f \circ \varphi)$. Schließlich haben wir

$$K_{H^2(\mathbb{C}^+)}(z, w) = \phi(z) \cdot \overline{\phi(w)} \cdot K_H(z, w) = \frac{1}{2\pi i(\bar{w} - z)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^+.$$

Ist ein holomorphes $h : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ durch eins beschränkt, gilt also $\|h\|_\infty \leq 1$, so ist auch $h \circ \varphi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und erfüllt $\|h \circ \varphi^{-1}\|_\infty \leq 1$. Wie wir in Beispiel 1.7, (2), gesehen haben, bildet der Multiplikationsoperator mit $h \circ \varphi^{-1}$ eine Kontraktion $M_{h \circ \varphi^{-1}} \in L_b(H^2(\mathbb{D}))$, weshalb auch $(\psi_\phi \circ \psi) \circ M_{h \circ \varphi^{-1}} \circ (\psi_\phi \circ \psi)^{-1} \in L_b(H^2(\mathbb{C}^+))$ mit gleicher Abbildungsnorm ≤ 1 . Da für $g = (\psi_\phi \circ \psi)(f) \in H^2(\mathbb{C}^+)$ die Gleichheit

$$(\psi_\phi \circ \psi) \circ M_{h \circ \varphi^{-1}} \circ (\psi_\phi \circ \psi)^{-1}(g) = (\psi_\phi \circ \psi)((h \circ \varphi^{-1}) \cdot f) = \phi \cdot h \cdot (f \circ \varphi) = h \cdot g$$

zutrifft, stimmt $(\psi_\phi \circ \psi) \circ M_{h \circ \varphi^{-1}} \circ (\psi_\phi \circ \psi)^{-1}$ mit dem folglich ebenso kontraktiven Multiplikationsoperator $M_h \in L_b(H^2(\mathbb{C}^+))$, $M_h(g) = h \cdot g$, $g \in H^2(\mathbb{C}^+)$, überein.

3.4 Proposition. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ seien $H_1, H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ zwei kernreproduzierende Hilberträume über derselben Menge Ω .

Im Fall $H_1 \subseteq H$ als Teilräume von $\mathbb{K}^\Omega$ ist die Einbettungsabbildung $T : H_1 \rightarrow H$ automatisch beschränkt und erfüllt $T^*k_t^H = k_t^{H_1}$ für alle $t \in \Omega$.

Zudem sind folgende Aussagen äquivalent.

- Es gilt $H_1 \subseteq H$ und die Einbettungsabbildung $T : H_1 \rightarrow H$ erfüllt $\|T\| \leq 1$.
- $K := K_H - K_{H_1}$ als Abbildung von $\Omega \times \Omega$ nach $\mathbb{C}$ erfüllt

$$K(s, t) = \overline{K(t, s)}, \quad s, t \in \Omega,$$

sowie (7).

In dem Fall gilt $K = K_{H_2}$ für einen kernreproduzierenden Hilbertraum H_2 über Menge Ω mit einer ebenfalls kontraktiven Einbettungsabbildung $H_2 \ni f \mapsto f \in H$.

Beweis. Können wir im Fall $H_1 \subseteq H$ von der Einbettungsabbildung $T : H_1 \rightarrow H$ zeigen, dass T als Unterraum von $H_1 \times H$ abgeschlossen ist, so folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Beschränktheit von T .

Dafür sei $((f_n; T f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aus T mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n; T f_n) = (f; g) \in H_1 \times H$. Da für $t \in \Omega$ die Punktauswertung sowohl auf H_1 als auch auf H stetig ist, folgt wegen $T f_n = f_n$ als Elemente von $\mathbb{K}^\Omega$

$$\begin{aligned} g(t) &= (g, k_t^H)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (T f_n, k_t^H)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (T f_n)(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, k_t^{H_1})_{H_1} = (f, k_t^{H_1})_{H_1} = f(t). \end{aligned}$$

Also stimmen g und f als Elemente von $\mathbb{K}^\Omega$ überein, was genau $T f = g$ bedeutet. Für die Adjungierte $T^* \in L_b(H, H_1)$ der Einbettungsabbildung gilt wegen

$$(f, T^* k_t^H)_{H_1} = (T f, k_t^H)_H = (T f)(t) = f(t) = (f, k_t^{H_1})_{H_1}, \quad f \in H_1,$$

$T^* k_t^H = k_t^{H_1}$ für alle $t \in \Omega$.

Im Fall, dass dabei $\|T\| \leq 1$, folgt für $t_1, \dots, t_N \in \Omega$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ wegen $K_{H_j}(t_m, t_n) = (k_{t_m}^{H_j}, k_{t_n}^{H_j})_{H_j}$ und $\|T^*\| = \|T\|$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K_{H_1}(t_m, t_n) &= \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}^{H_1} \right\|_{H_1}^2 = \|T^* \sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}^H\|_{H_1}^2 \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n k_{t_n}^H \right\|_H^2 = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K_H(t_m, t_n), \end{aligned}$$

weshalb $K = K_H - K_{H_1}$ (7) erfüllt. $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von K_{H_1} und K_H .

Gilt umgekehrt $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, und (7), so gibt es gemäß Satz 1.13 einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H_2 \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ mit $K = K_{H_2}$. Ebenfalls wegen Satz 1.13 ist der kernreproduzierende Hilbertraum H eindeutig durch $K_H = K_{H_1} + K_{H_2}$ bestimmt, wodurch wir mit den Überlegungen aus Fakta 3.1, 6, $H_1, H_2 \subseteq H$ samt kontraktiver Einbettungsabbildungen erhalten. $\square$

3.5 Bemerkung. Ist in Fakta 3.1, 1, die Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ konstant gleich $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so haben wir $H = \psi(G) = d \cdot G = G$, $\psi(f) = d \cdot f$ für $f \in H$ und $K_H(s, t) = |d|^2 \cdot K_G(s, t)$. Die entsprechende Einbettungsabbildung ist daher $\frac{1}{d} \psi : G \rightarrow H$, wobei $\frac{1}{d} \|\psi\| = \frac{1}{d}$.

Ist dann $H_1 \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein weiterer kernreproduzierender Hilbertraum mit $H_1 \subseteq G$ und folglich beschränkter Einbettungsabbildung $S : H_1 \rightarrow G$, so ergeben diese

Überlegungen mit $d \geq \|S\|$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum H , wobei die Einbettungsabbildung von H_1 nach H genau $\frac{1}{d}\psi \circ S$ und infolge kontraktiv ist. Eine Anwendung von Proposition 3.4 zeigt, dass $K := d^2 K_G - K_{H_1}$ (7) und $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in \Omega$, erfüllt.

3.6 Beispiel. Wie wir in Beispiel 3.3 gesehen haben, besteht der kernreproduzierende Hilbertraum $H_2(\mathbb{C}^+) (\subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{C}^+})$ aus holomorphen Funktionen und hat $K_{H_2(\mathbb{C}^+)}(z, w) = \frac{1}{2\pi i(\bar{w} - z)}$, $z, w \in \mathbb{C}^+$, als Kernfunktion. Zudem bildet für ein holomorphes $h : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|h\|_\infty \leq 1$ der Multiplikationsoperator $M_h(f) = h \cdot f$ eine Kontraktion $M_h : H_2(\mathbb{C}^+) \rightarrow H_2(\mathbb{C}^+)$. Man beachte, dass $h \cdot f = 0$ wegen der Holomorphie $f = 0$ nach sich zieht.

Gemäß Fakta 3.1, 1, lässt sich der lineare Unterraum

$$h \cdot H_2(\mathbb{C}^+) := M_h(H_2(\mathbb{C}^+)) = \{h \cdot f : f \in H_2(\mathbb{C}^+)\} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{C}^+}$$

als kernreproduzierender Hilbertraum H_1 mit Kernfunktion

$$K_{H_1}(z, w) = \frac{h(z) \cdot \overline{h(w)}}{2\pi i(\bar{w} - z)}$$

interpretieren, wann man H_1 mit einem Skalarprodukt derart versteht, dass $H_2(\mathbb{C}^+) \ni f \mapsto h \cdot f \in H_1$ eine lineare und isometrische Bijektion ist.

Also haben wir auf dem linearen Unterraum $M_h(H_2(\mathbb{C}^+))$ von $H_2(\mathbb{C}^+)$ zwei Skalarprodukte (und daher auch Normen). Einmal die von $H_2(\mathbb{C}^+)$ auf $M_h(H_2(\mathbb{C}^+))$ als Teilraum induzierte Norm $\|\cdot\|_{H_2(\mathbb{C}^+)}$ und ein andermal das von $H_2(\mathbb{C}^+) \ni f \mapsto h \cdot f \in H$ als lineare und isometrische Bijektion induzierte $\|\cdot\|_{H_1}$, wobei für $f \in H_2(\mathbb{C}^+)$

$$\|h \cdot f\|_{H_2(\mathbb{C}^+)} = \|M_h(f)\|_{H_2(\mathbb{C}^+)} \leq \|f\|_{H_2(\mathbb{C}^+)} = \|h \cdot f\|_{H_1}.$$

Also ist die Einbettungsabbildung $T : H_1 \rightarrow H_2(\mathbb{C}^+)$ kontraktiv. Gemäß Proposition 3.4 bildet damit

$$K(z, w) = K_{H_2(\mathbb{C}^+)}(z, w) - K_{H_1}(z, w) = \frac{1 - h(z) \cdot \overline{h(w)}}{2\pi i(\bar{w} - z)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^+,$$

die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes, der ebenfalls kontraktiv in $H_2(\mathbb{C}^+)$ enthalten ist.

4 Tensorprodukte von Hilberträumen

4.1 Definition. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $H_1, \dots, H_n$ Hilberträume über $\mathbb{K}$. Einen Hilbertraum H über dem Körper $\mathbb{K}$ zusammen mit einer Abbildung $\omega_H : H_1 \times \dots \times H_n \rightarrow H$ nennen wir *Hilbertraum-Tensorprodukt* der Hilberträume $H_1, \dots, H_n$, falls ω_H multilinear und $\text{span}\{\omega_H(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n\}$ dicht in H ist sowie

$$(\omega_H(x_1, \dots, x_n), \omega_H(y_1, \dots, y_n))_H = (x_1, y_1)_{H_1} \cdot \dots \cdot (x_n, y_n)_{H_n} \quad (10)$$

für alle $x_1, y_1 \in H_1, \dots, x_n, y_n \in H_n$ zutrifft.

4.2 Beispiel. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für Mengen $M_1, \dots, M_n$ bildet der Raum $\ell^2(M_1 \times \dots \times M_n, \mathbb{K})$ versehen mit

$$(f, g)_{\ell^2} = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} f(m_1, \dots, m_n) \cdot \overline{g(m_1, \dots, m_n)}, \quad f, g \in \ell^2(M_1 \times \dots \times M_n, \mathbb{K}),$$

einen Hilbertraum, wobei hier die rechte Seite unbedingt konvergiert. Die Abbildung $\omega_{\ell^2} : \ell^2(M_1, \mathbb{K}) \times \dots \times \ell^2(M_n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{M_1 \times \dots \times M_n}$ definiert durch

$$\omega_{\ell^2}(g_1, \dots, g_n)(m_1, \dots, m_n) := g_1(m_1) \cdot \dots \cdot g_n(m_n), \quad g_j \in \ell^2(M_j, \mathbb{K}),$$

ist offenbar multilinear und erfüllt

$$\begin{aligned} & \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} |\omega_{\ell^2}(g_1, \dots, g_n)(m_1, \dots, m_n)|^2 \\ &= \sum_{(m_2, \dots, m_n) \in M_2 \times \dots \times M_n} |g_2(m_2)|^2 \cdot \dots \cdot |g_n(m_n)|^2 \sum_{m_1 \in M_1} |g_1(m_1)|^2 \\ &= \|g_1\|_{\ell^2}^2 \cdot \sum_{(m_2, \dots, m_n) \in M_2 \times \dots \times M_n} |g_2(m_2)|^2 \cdot \dots \cdot |g_n(m_n)|^2 \\ &= \dots = \|g_1\|_{\ell^2}^2 \cdot \dots \cdot \|g_n\|_{\ell^2}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

womit ω_{ℓ^2} nach $\ell^2(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathbb{K})$ hinein abbildet. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
 (\omega_{\ell^2}(f_1, \dots, f_n), \omega_{\ell^2}(g_1, \dots, g_n))_{\ell^2} &= \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n} f_1(m_1) \overline{g_1(m_1)} \cdot \dots \cdot f_n(m_n) \overline{g_n(m_n)} \\
 &= \sum_{(m_2, \dots, m_n) \in M_2 \times \cdots \times M_n} \sum_{m_1 \in M_1} f_1(m_1) \overline{g_1(m_1)} \cdot f_2(m_2) \overline{g_2(m_2)} \cdot \dots \cdot f_n(m_n) \overline{g_n(m_n)} \\
 &= \sum_{(m_2, \dots, m_n) \in M_2 \times \cdots \times M_n} \left(\sum_{m_1 \in M_1} f_1(m_1) \overline{g_1(m_1)} \right) \cdot f_2(m_2) \overline{g_2(m_2)} \cdot \dots \cdot f_n(m_n) \overline{g_n(m_n)} \\
 &= (f_1, g_1)_{\ell^2} \sum_{(m_2, \dots, m_n) \in M_2 \times \cdots \times M_n} f_2(m_2) \overline{g_2(m_2)} \cdot \dots \cdot f_n(m_n) \overline{g_n(m_n)} \\
 &= \dots = (f_1, g_1)_{\ell^2} \cdot \dots \cdot (f_n, g_n)_{\ell^2}.
 \end{aligned}$$

Zudem haben wir $\omega_{\ell^2}(\delta_{m_1}, \dots, \delta_{m_n}) = \delta_{m_1} \cdot \dots \cdot \delta_{m_n} = \delta_{(m_1, \dots, m_n)}$ für alle $(m_1, \dots, m_n)$ aus $M_1 \times \cdots \times M_n$. Da $\{\delta_{(m_1, \dots, m_n)} : (m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathbb{K})$ bildet, ist $\text{span } \omega_{\ell^2}(\ell^2(M_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \ell^2(M_n, \mathbb{K}))$ dicht im Raum $\ell^2(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathbb{K})$. Also ist $\ell^2(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathbb{K})$ zusammen mit ω_{ℓ^2} ein Hilbert-Tensorprodukt von $\ell^2(M_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \ell^2(M_n, \mathbb{K})$.

4.3 Fakta. Seien $H_1, \dots, H_n$ Hilberträume über demselben Körper $\mathbb{K}$.

1. Es gibt immer ein Hilbertraum-Tensorprodukt von $H_1, \dots, H_n$.

Um das einzusehen, wählen wir zu jedem $j = 1, \dots, n$ Orthonormalbasen E_j von H_j . Die entsprechenden Fouriertransformationen $\mathcal{F}_{E_j} : H_j \rightarrow \ell^2(E_j, \mathbb{K})$ sind lineare und isometrische Bijektionen. Bezeichnet $\omega : \ell^2(E_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \ell^2(E_n, \mathbb{K}) \rightarrow \ell^2(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathbb{K})$ die Abbildung aus Beispiel 4.2, so gilt für alle $x_1, y_1 \in H_1, \dots, x_n, y_n \in H_n$

$$\begin{aligned}
 &(\omega(\mathcal{F}_{E_1}(x_1), \dots, \mathcal{F}_{E_n}(x_n)), \omega(\mathcal{F}_{E_1}(y_1), \dots, \mathcal{F}_{E_n}(y_n)))_{\ell^2} \\
 &= (\mathcal{F}_{E_1}(x_1), \mathcal{F}_{E_1}(y_1))_{\ell^2} \cdot \dots \cdot (\mathcal{F}_{E_n}(x_n), \mathcal{F}_{E_n}(y_n))_{\ell^2} = (x_1, y_1)_{H_1} \cdot \dots \cdot (x_n, y_n)_{H_n}.
 \end{aligned}$$

Zudem ist die lineare Hülle von $\omega(\mathcal{F}_{E_1}(H_1), \dots, \mathcal{F}_{E_n}(H_n)) = \omega(\ell^2(E_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \ell^2(E_n, \mathbb{K}))$ dicht in $\ell^2(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathbb{K})$. Somit erfüllt $\omega \circ (\mathcal{F}_{E_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{E_n}) : H_1 \times \cdots \times H_n \rightarrow \ell^2(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathbb{K})$ alle Anforderungen aus Definition 4.1.

2. Für jedes Hilbertraum-Tensorprodukt H, ω_H von $H_1, \dots, H_n$ ist die multilineare Abbildung $\omega_H : H_1 \times \cdots \times H_n \rightarrow H$ stetig.

Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass $H_1 \times \cdots \times H_n$ einen Hilbertraum abgibt. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es, die Stetigkeit auf einer abgeschlossenen Kugel von beliebigem Radius $C > 0$ in $H_1 \times \cdots \times H_n$ um die Null nachzuweisen. Für $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$ mit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{H_1 \times \cdots \times H_n}, \|(y_1, \dots, y_n)\|_{H_1 \times \cdots \times H_n} \leq C$ folgt wegen $\|x_j\|_{H_j} \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_{H_1 \times \cdots \times H_n}$

$$\begin{aligned} & \|\omega_H(x_1, \dots, x_n) - \omega_H(y_1, \dots, y_n)\|_H \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n \omega_H(x_1, \dots, x_{j-1}, (x_j - y_j), y_{j+1}, \dots, y_n) \right\|_H \\ &\leq C^{n-1} \sum_{j=1}^n \|x_j - y_j\|_{H_j} \\ &\leq nC^{n-1} \|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|_{H_1 \times \cdots \times H_n}. \end{aligned}$$

Infolge ist die Einschränkung von ω_H auf $K_C^{H_1 \times \cdots \times H_n}(0)$ stetig.

3. Für jedes Hilbertraum-Tensorprodukt H, ω_H von $H_1, \dots, H_n$ und lineare Teilmengen Z_j der H_j gilt wegen des vorherigen Punktes und der Multilinearität

$$\begin{aligned} \omega_H(\mathcal{cl}(Z_1) \times \cdots \times \mathcal{cl}(Z_n)) &= \omega_H(\mathcal{cl}(Z_1 \times \cdots \times Z_n)) \\ &\subseteq \mathcal{cl} \omega_H(Z_1 \times \cdots \times Z_n) \subseteq \mathcal{cl} \text{span } \omega_H(Z_1 \times \cdots \times Z_n). \end{aligned}$$

Insbesondere stellt $\mathcal{cl} \text{span } \omega_H(Z_1 \times \cdots \times Z_n)$ zusammen mit der Einschränkung von ω_H auf $\mathcal{cl}(Z_1) \times \cdots \times \mathcal{cl}(Z_n)$ ein Hilbertraum-Tensorprodukt von $\mathcal{cl}(Z_1), \dots, \mathcal{cl}(Z_n)$ dar.

4. Sind H, ω_H und G, ω_G zwei Tensorprodukte von $H_1, \dots, H_n$, so gibt es eine eindeutige lineare und isometrische Bijektion $U : H \rightarrow G$ mit $U \circ \omega_H = \omega_G$.

Um das einzusehen, seien E_j Orthonormalbasen H_j . Wegen (10) bildet die Menge $\omega_H(E_1 \times \cdots \times E_n)$ ein Orthonormalsystem in H mit bijektivem $\omega_H|_{E_1 \times \cdots \times E_n} : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow \omega_H(E_1 \times \cdots \times E_n)$. Wegen $\mathcal{cl} \text{span } E_j = H_j$, wegen des vorherigen Punktes und wegen $\text{span } \omega_H(\text{span } E_1 \times \cdots \times \text{span } E_n) = \text{span } \omega_H(E_1 \times \cdots \times E_n)$ (Multilinearität) folgt

$$\begin{aligned} & \text{span } \omega_H(H_1 \times \cdots \times H_n) \\ &\subseteq \mathcal{cl} \text{span } \omega_H(\text{span } E_1 \times \cdots \times \text{span } E_n) = \mathcal{cl} \text{span } \omega_H(E_1 \times \cdots \times E_n). \end{aligned}$$

Mit der linken Seite ist auch die rechte dicht in H , weshalb $\omega_H(E_1 \times \cdots \times E_n)$ sogar eine Orthonormalbasis von H abgibt.

Entsprechend ist $\omega_G(E_1 \times \cdots \times E_n)$ eine Orthonormalbasis von G . Folglich gibt es eine lineare und isometrischen Bijektion $U : G \rightarrow H$ mit $U(\omega_H(e_1, \dots, e_n)) = \omega_G(e_1, \dots, e_n)$ für beliebige $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$, was wegen Multilinearität und Stetigkeit $U \circ \omega_H = \omega_G$ nach sich zieht.

4.4 Bemerkung. Die in Fakta 4.3 nachgewiesene Existenz und Eindeutigkeit eines Hilbertraum-Tensorproduktes H, ω_H von Hilberträumen $H_1, \dots, H_n$ bis auf Isomorphie rechtfertigt, dass wir $H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n$ statt H und $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ statt $\omega_H(x_1, \dots, x_n)$ für $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$ schreiben.

5 Multiplikationen von Kernfunktionen

Weitere Möglichkeiten, um die Überlegungen Lemma 1.6 anzuwenden, bieten Tensorprodukte.

5.1 Fakta. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $j = 1, \dots, n$ sei Ω_j nichtleere Mengen und $H_j \subseteq \mathbb{K}^{\Omega_j}$ ein kernreproduzierender Hilbertraum.

1. Wir betrachten die Abbildung $k : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \rightarrow H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n$ mit $k(t_1, \dots, t_n) = k_{t_1}^{H_1} \otimes \cdots \otimes k_{t_n}^{H_n}$, wobei $H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n$ gemäß Definition 4.1 und Bemerkung 4.4 definiert ist. Nach Fakta 4.3, 3, ist

$$\begin{aligned} \text{span}\{k_{t_1}^{H_1} \otimes \cdots \otimes k_{t_n}^{H_n} : (t_1, \dots, t_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n\} \\ = \text{span}(\text{span}\{k_{t_1}^{H_1} : t_1 \in \Omega_1\}) \otimes \cdots \otimes (\text{span}\{k_{t_n}^{H_n} : t_n \in \Omega_n\}) \end{aligned}$$

dicht in $H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n$. Wenden wir Lemma 1.6 auf $H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n$ als G und $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ an, so erhalten wir einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n}$ und eine lineare und isometrische Bijektion $\psi_n : H_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} H_n \rightarrow H$ mit

$$\begin{aligned} \psi_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(t_1, \dots, t_n) &= (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, k_{t_1}^{H_1} \otimes \cdots \otimes k_{t_n}^{H_n}) \\ &= (f_1, k_{t_1}^{H_1})_{H_1} \cdots (f_n, k_{t_n}^{H_n})_{H_n} = f_1(t_1) \cdots f_n(t_n) \end{aligned}$$

für $f_1 \in H_1, \dots, f_n \in H_n$ und $(t_1, \dots, t_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, weshalb

$$\begin{aligned} K_H((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n)) &= k_{(t_1, \dots, t_n)}^H(s_1, \dots, s_n) \\ &= \psi_n(k_{t_1}^{H_1} \otimes \dots \otimes k_{t_n}^{H_n})(s_1, \dots, s_n) \\ &= k_{t_1}^{H_1}(s_1) \cdot \dots \cdot k_{t_n}^{H_n}(s_n) \\ &= K_{H_1}(s_1, t_1) \cdot \dots \cdot K_{H_n}(s_n, t_n). \end{aligned}$$

2. Gelte zusätzlich $\Omega := \Omega_1 = \dots = \Omega_n$, setze $\Lambda := \Omega^n$ und nenne den in 1 erhaltenen kernreproduzierenden Hilbertraum H auf Ω um in L .

Wir wenden Fakta 3.1, 2, an auf die Abbildung $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^n$ mit $\varphi(t) = (t, \dots, t)$ und den kernreproduzierenden Hilbertraum $L \subseteq \mathbb{K}^{\Omega^n}$. Der resultierende kernreproduzierende Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt linearer und surjektiver Abbildung $\psi : L \rightarrow H$ erfüllt dann für $f_1 \in H_1, \dots, f_n \in H_n$

$$\psi \circ \psi_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)(t) = \psi_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)(\varphi(t)) = f_1(t) \cdot \dots \cdot f_n(t).$$

wobei wegen $\|\psi\|, \|\psi_n\| \leq 1$ und (10)

$$\|f_1 \cdot \dots \cdot f_n\|_H \leq \|f_1\|_{H_1} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{H_n}.$$

Zudem gilt $\ker \psi = \{h \in L : h(t, \dots, t) = 0, t \in \Omega\}$ sowie

$$\begin{aligned} K_H(s, t) &= k_t^H(s) = k_{(t, \dots, t)}^L((s, \dots, s)) \\ &= k_t^{H_1}(s) \cdot \dots \cdot k_t^{H_n}(s) = K_{H_1}(s, t) \cdot \dots \cdot K_{H_n}(s, t). \end{aligned}$$

3. Seien Ω eine nichtleere Menge und $L \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum. Weiters setzen wir $L_0 := H(K_0)$, wobei $K_0(s, t) = 1$ und folglich $H(K_0) = \text{span}\{\mathbb{1}_\Omega\}$ (siehe Beispiel 1.15 mit $\phi = \mathbb{1}_\Omega$), und $L_m := H(K_L^m)$, was genau dem Raum aus dem vorherigen Punkt ausgehend von $H_1 = \dots = H_m = L$ entspricht.

Ist $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ derart, dass $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m|^2 K_L(t, t)^m < +\infty$ für jedes $t \in \Omega$, so erhalten wir gemäß Fakta 3.1, 8, einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ samt linearer, surjektiver und kontraktiver Abbildung $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, (L_m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) \rightarrow H$ mit $\psi((f_m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \alpha_m f_m$ und

$$K_H(s, t) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |\alpha_m|^2 K_L^m(s, t), \quad s, t \in \Omega.$$

Starten wir mit $f \in L$, so folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$ aus dem vorherigen Punkt zunächst $f^m \in L_m$ mit $\|f^m\|_H \leq \|f\|_L^m$. Im Fall $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m|^2 \|f\|_L^{2m} < +\infty$ liegt $(\bar{\alpha}_m f^m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ in $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, (L_m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}})$ und daher

$$\psi((\bar{\alpha}_m f^m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |\alpha_m|^2 f^m, \quad t \in \Omega,$$

wobei $\|\sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |\alpha_m|^2 f^m\|_H^2 \leq \|(\bar{\alpha}_m f^m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m|^2 \|f\|_L^{2m}$.

5.2 Beispiel. In Beispiel 1.16 haben wir gesehen, dass für $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Funktion $K_1(i, j) := b_{ij}$, $i, j \in \Omega$, die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega \simeq \mathbb{K}^n$ abgibt.

Ist $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine weitere hermitesche, positiv semidefinite Matrix und bezeichnet $K_2(i, j) := c_{ij}$, $i, j \in \Omega$, die entsprechende Kernfunktion, so erhalten wir aus Fakta 5.1, 2, dass auch $K_1(i, j) \cdot K_2(i, j)$, $i, j \in \Omega$, Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes abgibt. Nach der zweiten Aussage in Satz 1.13 ist folglich die $n \times n$ -Matrix $(b_{ij} \cdot c_{ij})_{i,j=1}^n$ ebenfalls hermitesch und positiv semidefinit.

5.3 Beispiel. Seien Ω eine nichtleere Menge und $L \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum. Für $\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{m!}}$ konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m|^2 \eta^m$ für alle $\eta > 0$. Gemäß Fakta 5.1, 3, und mit den dortigen Voraussetzungen ist daher $\exp(K_L(s, t))$ die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes, der für $f \in L$ die Funktion $\exp \circ f$ mit Norm $\leq \sqrt{\exp(\|f\|_L^2)}$ enthält.

1. Sei G ein beliebiger Hilbertraum. Für $\Omega := G$ sei $L \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ genau der kernreproduzierender Hilbertraum H aus Beispiel 1.9 mit Kernfunktion $K_L(x, y) = (y, x)_G$. Für eine Konstante $\lambda > 0$ ist zunächst gemäß Fakta 3.1, 1, $2\lambda \cdot K_L(x, y)$ und damit $K_1(x, y) = \exp(2\lambda(y, x)_G)$ Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf Ω .

Nach Beispiel 1.15 ist $K_2(x, y) := \exp(-\lambda\|x\|_G^2) \cdot \exp(-\lambda\|y\|_G^2)$ eine Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes mit Dimension eins auf der Menge $\Omega = G$. Aus Fakta 5.1, 2, erhalten wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass auch

$$\begin{aligned} K_1(x, y) \cdot K_2(x, y) &= \exp(2\lambda(y, x)_G) \exp(-\lambda\|x\|_G^2) \cdot \exp(-\lambda\|y\|_G^2) \\ &= \exp(-\lambda\|x - y\|_G^2) \end{aligned}$$

die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf der Menge Ω abgibt. Man spricht vom Gauss-Kern.

2. In Beispiel 1.7, (1) und (3), haben wir die kernreproduzierenden Hilberträume $H_2(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ und $\mathcal{D}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ betrachtet, wobei $K_{H_2(\mathbb{D})}(z, w) = \frac{1}{1-z\bar{w}}$ und $K_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}(z, w) = \log\left(\frac{1}{1-z\bar{w}}\right)$.

Mit $\Omega = \mathbb{D}$ und $L = \mathcal{D}(\mathbb{D})$ erhalten wir $\exp(K_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}(z, w)) = \frac{1}{1-z\bar{w}} = K_{H_2(\mathbb{D})}(z, w)$, weshalb auch $\exp \circ f \in H_2(\mathbb{D})$ mit $\|\exp \circ f\|_{H_2(\mathbb{D})} \leq \sqrt{\exp(\|f\|_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}^2)}$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$.

6 Kernreproduzierende Hilberträume stetiger Funktionen

6.1 Lemma. Sei Ω eine nichtleere Menge und $H \subseteq \mathbb{K}^{\Omega}$ ein kernreproduzierender Hilbertraum. Für Teilmenge $\Lambda \subseteq \Omega$ ist die Beschränktheit aller $f \in H$ auf Λ zu der von $\Lambda \ni t \mapsto K_H(t, t) \in \mathbb{K}$ äquivalent. In dem Fall gilt

$$\|f|_{\Lambda}\|_{\infty} \leq \sup_{t \in \Lambda} \sqrt{|K_H(t, t)|} \cdot \|f\|, \quad (11)$$

wodurch sich $f \rightarrow f|_{\Lambda}$ als Abbildung von H nach $\ell^{\infty}(\Lambda, \mathbb{K})$ als beschränkt herausstellt.

Beweis. Für $f \in H$ und $t \in \Lambda$ gilt

$$|f(t)| = |(f, k_t^H)| \leq \|f\| \cdot \|k_t^H\| = \|f\| \cdot \sqrt{(k_t^H, k_t^H)} = \sqrt{K_H(t, t)} \cdot \|f\|,$$

womit (11) zutrifft. Im Fall eines beschränkten $\Lambda \ni t \mapsto K_H(t, t) \in \mathbb{K}$ bedingt das die Beschränktheit aller $f|_{\Lambda}$.

Umgekehrt bedeutet die Beschränktheit aller $f|_{\Lambda}$, dass für $\{\varpi_t : t \in \Lambda\} \subseteq L_b(H, \mathbb{K}) = H'$ und jedes $f \in H$

$$\sup_{t \in \Lambda} |\varpi_t(f)| = \sup_{t \in \Lambda} |f(t)| < +\infty.$$

Wir erhalten aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit

$$\sup_{t \in \Lambda} \sqrt{K_H(t, t)} = \sup_{t \in \Lambda} \|k_t^H\| = \sup_{t \in \Lambda} \|\varpi_t\| < +\infty. \quad \square$$

6.2 Proposition. Sei Ω ein topologischer Raum und $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum.

Ist für jedes $t \in \Omega$ die Funktion $\Omega \ni s \mapsto K_H(s, t) \in \mathbb{K}$ stetig sowie die Funktion $\Omega \ni s \mapsto K_H(s, s) \in [0, +\infty)$ lokal beschränkt, gibt es also für jedes $\omega \in \Omega$ eine Umgebung U_ω davon mit $\sup_{s \in U_\omega} K_H(s, s) < +\infty$, so sind alle $f \in H$ stetig.

Ist Ω ein lokalkompakter topologischer Raum, so gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Für $g = \sum_{j=1}^m \alpha_j k_{t_j}^H \in M := \text{span}\{k_\omega^H : \omega \in \Omega\}$ ist $g(s) = (g, k_s^H)_H = \sum_{j=1}^m \alpha_j (k_{t_j}^H, k_s^H)_H = \sum_{j=1}^m \alpha_j K_H(s, t_j)$ voraussetzungsgemäß stetig.

Für $\omega \in \Omega$ und U_ω wie in der Voraussetzung bildet die Einschränkungsabbildung

$$.\mid_{U_\omega} : H \rightarrow \ell^\infty(U_\omega, \mathbb{K})$$

nach Lemma 6.1 eine lineare und beschränkte Abbildung. Da $C_b(U_\omega, \mathbb{K})$ einen abgeschlossenen Unterraum von $\ell^\infty(U_\omega, \mathbb{K})$ abgibt, folgt aus der Dichtheit von M in H und aus $.\mid_{U_\omega}(M) \subseteq C_b(U_\omega, \mathbb{K})$

$$.\mid_{U_\omega}(H) = .\mid_{U_\omega}(c\ell M) \subseteq c\ell(. \mid_{U_\omega}(M)) \subseteq c\ell(C_b(U_\omega, \mathbb{K})) = C_b(U_\omega, \mathbb{K}),$$

womit alle $f \in H$ bei ω stetig sind.

Sind alle $f \in H$ stetig, so ist es insbesondere jedes $k_t^H = (s \mapsto K_H(s, t))$, $t \in \Omega$. Im Falle eines lokalkompakten topologischen Raumes Ω ist für $\omega \in \Omega$ und eine kompakte Umgebung U_ω davon jedes stetige $f \in H$ auf U_ω beschränkt. Nach Lemma 6.1 ist auch $s \mapsto K_H(s, s)$ auf U_ω beschränkt, also $\Omega \ni s \mapsto K_H(s, s) \in [0, +\infty)$ lokal beschränkt. $\square$

6.3 Proposition. Sind Ω ein topologischer Raum und $H \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- Die Abbildung $t \mapsto k_t^H$ von Ω nach $(H, \|\cdot\|)$ ist stetig.
- Die Einheitskugel $K_1(0) = \{f \in H : \|f\| \leq 1\}$ in H ist gleichgradig stetig.
- Die Abbildung $(\omega, t) \mapsto K_H(t, \omega)$ von $\Omega \times \Omega$ nach $\mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis. Die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen in $\{f \in H : \|f\| \leq 1\}$ bedeutet, dass es zu $\omega \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ eine Umgebung U_ω von ω gibt mit

$$\sup_{f \in H, \|f\| \leq 1} |f(t) - f(\omega)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in U_\omega.$$

Da $f \mapsto (f, g)_H$ Abbildungsnorm $\|g\|$ hat, gilt

$$\sup_{f \in H, \|f\| \leq 1} |f(t) - f(\omega)| = \sup_{f \in H, \|f\| \leq 1} |(f, k_t^H - k_\omega^H)| = \|k_t^H - k_\omega^H\|,$$

wodurch sich die Stetigkeit von $t \mapsto k_t^H$ äquivalent zur gleichgradigen Stetigkeit der Einheitskugel von H herausstellt.

Ist $t \mapsto k_t^H$ als Abbildung von Ω nach $(H, \|\cdot\|)$ stetig, so auch $(s; t) \mapsto (k_t^H; k_s^H)$ von $\Omega \times \Omega$ nach $H \times H$. Wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation auf $H \times H$ ist auch die Zusammensetzung

$$\Omega \times \Omega \ni (s; t) \mapsto (k_t^H; k_s^H) \mapsto (k_t^H, k_s^H) = K_H(s, t) \in \mathbb{K}$$

stetig. Umgekehrt bedingt die Stetigkeit von $(s; t) \mapsto K_H(s, t)$ für $\omega, t \in \Omega$ wegen

$$\begin{aligned} \|k_t^H - k_\omega^H\|^2 &= (k_t^H - k_\omega^H, k_t^H - k_\omega^H) = (k_t^H, k_t^H) + (k_\omega^H, k_\omega^H) - (k_t^H, k_\omega^H) - (k_\omega^H, k_t^H) = \\ &= K_H(t, t) + K_H(\omega, \omega) - K_H(\omega, t) - K_H(t, \omega) \xrightarrow{t \rightarrow \omega} 0 \end{aligned}$$

die Stetigkeit von $t \mapsto k_t^H$. □

7 Kernreproduzierende Hilberträume holomorpher Funktionen

Im Folgenden wollen wir kernreproduzierende Hilberträume über $\mathbb{C}$ behandeln, deren Elemente holomorphe Funktionen sind.

Für eine offene Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ bezeichnet $H(\Omega)$ bzw. $H(\Omega, \mathbb{C})$ die Menge aller komplexwertigen holomorphen Funktionen, die bezüglich der punktweisen Addition und punktweisen Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bildet. Da der lokal gleichmäßige und folglich auch der gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen wieder holomorph ist, bildet $H_b(\Omega, \mathbb{C}) := H(\Omega, \mathbb{C}) \cap \ell^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ einen angeschlossenen Unterraum von $(\ell^\infty(\Omega, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

7.1 Proposition. *Ist Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $H \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum über $\mathbb{C}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) *H besteht aus lauter holomorphen Funktionen.*

- (ii) $\Omega \ni z \mapsto K_H(z, w) \in \mathbb{C}$ ist für alle $w \in \Omega$ holomorph und $\Omega \ni z \mapsto K_H(z, z) \in [0, +\infty)$ lokal beschränkt.
- (iii) Die Abbildung $\overline{\Omega} \ni w \mapsto k_w^H \in H$ ist holomorph.
- (iv) $\Omega \times \overline{\Omega} \ni (z; w) \mapsto K_H(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$ ist holomorph im Sinne von Satz 10.5.

Beweis. Aus (i) folgt insbesondere die Holomorphie von $k_w^H = (z \mapsto K_H(z, w))$. Da Ω als topologischer Raum lokalkompakt ist und da alle holomorphen Funktionen stetig sind, erhalten wir die lokale Beschränktheit von $z \mapsto K_H(z, z)$ aus Proposition 6.2. Also gilt (ii).

Unter der Voraussetzung (ii) wählen wir zu $w \in \Omega$ eine offene Umgebung $U_w (\subseteq \Omega)$ davon mit beschränktem $U_w \ni z \mapsto K_H(z, z) \in [0, +\infty)$, so bildet die Einschränkung $\cdot|_{U_w} : H \rightarrow \ell^\infty(U_w, \mathbb{C})$ nach Lemma 6.1 eine lineare und beschränkte Abbildung. Sind zudem alle $k_w^H = (z \mapsto K_H(z, w))$ holomorph, so haben wir $\cdot|_{U_w}(M) \subseteq H_b(U_w, \mathbb{C})$ für $M := \text{span}\{k_w^H : w \in \Omega\}$. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 6.2 folgt aus der Dichtheit von M und aus der Abgeschlossenheit von $H_b(U_w, \mathbb{C})$ in $\ell^\infty(U_w, \mathbb{C})$

$$\cdot|_{U_w}(H) = \cdot|_{U_w}(c\ell M) \subseteq c\ell(\cdot|_{U_w}(M)) \subseteq c\ell(H_b(U_w, \mathbb{C})) = H_b(U_w, \mathbb{C}).$$

Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, trifft (i) zu.

Infolge von Satz 10.3, der sich aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt, zusammen mit dem Satz von Riesz-Fischer ist (iii) äquivalent zur Holomorphie von $\overline{\Omega} \ni w \mapsto (k_w^H, f) = \overline{f(\bar{w})} \in \mathbb{C}$ für alle $f \in H$, was bekannterweise die Holomorphie aller $f \in H$, also (i) bedeutet.

Setzt man (ii) voraus, so ist für festes z auch $w \mapsto K_H(z, \bar{w}) = \overline{K_H(\bar{w}, z)}$ holomorph. Für $(z_0; w_0) \in \Omega \times \overline{\Omega}$ sei $r > 0$ so klein, dass $U_r(z_0) \cup U_r(\bar{w}_0) \subseteq \Omega$ und dass $K_H(z, z) \leq C (< +\infty)$ für alle $z \in U_r(z_0) \cup U_r(\bar{w}_0)$. Für $(z; w) \in U_r(z_0) \times U_r(w_0)$ folgt dann wegen $K_H(z, w) = (k_w, k_z)$ mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|K_H(z, \bar{w})|^2 \leq K_H(z, z)K_H(\bar{w}, \bar{w}) \leq C^2.$$

Also ist $(z; w) \mapsto K_H(z, \bar{w})$ auch lokal beschränkt, was zusammen mit der komponentweisen Holomorphie nach Satz 10.5 die Holomorphie von $(z; w) \mapsto K_H(z, \bar{w})$, also (iv) bedeutet.

Umgekehrt impliziert (iv) sicher die Holomorphie von $z \mapsto K_H(z, w)$ für jedes $w \in \Omega$ sowie die Stetigkeit von $(z; w) \mapsto K_H(z, \bar{w})$. Letzteres bedingt die Stetigkeit von $z \mapsto K_H(z, z)$ und daher die lokale Beschränktheit. $\square$

7.2 Bemerkung. Für einen Banachraum Y über $\mathbb{C}$ und ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt $g : D \rightarrow Y$ *antiholomorph*, wenn $g \circ \bar{\cdot} : \bar{D} \rightarrow Y$ holomorph ist. Für so ein g heißt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z) := (g \circ \bar{\cdot})'(\bar{z}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left((g \circ \bar{\cdot})(\bar{z} + h) - (g \circ \bar{\cdot})(\bar{z}) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(z + \bar{h}) - g(z))$$

die antiholomorphe Ableitung bei z .

Ist dann $T : Y \rightarrow Z$ konjugiert linear und stetig mit einem weiteren Banachraum über $\mathbb{C}$, so ist $T \circ g : D \rightarrow Z$ wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(g(z + h)) - T(g(z))) = T\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(z + h) - g(z))\right) = T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z)\right)$$

wieder holomorph mit $(T \circ g)'(z) = T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z)\right)$.

Insbesondere besagt die Aussage (iii) in Proposition 7.1, dass $\Omega \ni z \mapsto k_z^H \in H$ antiholomorph ist.

7.3 Beispiel. Der Hardyraum $H^2(\mathbb{D}) (\subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{D}})$ aus Beispiel 1.7, (1), besteht nach (2) aus holomorphen Funktionen. Der Hardyraum $H^2(\mathbb{C}^+)$ auf der oberen Halbebene erfüllt nach Beispiel 3.3

$$H^2(\mathbb{C}^+) = \left\{ (z \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)} \cdot f\left(\frac{z-i}{z+i}\right)) : f \in H^2(\mathbb{D}) \right\}$$

und besteht folglich auch aus lauter holomorphen Funktionen. Also treffen sowohl für $H^2(\mathbb{D})$ als auch für $H^2(\mathbb{C}^+)$ die drei Aussagen in Proposition 7.1 zu.

7.4 Bemerkung. Seien G ein abstrakter Hilbertraum, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $k : \Omega \rightarrow G$ eine Abbildung derart, dass $\bar{\Omega} \ni w \mapsto k(\bar{w}) \in G$ holomorph ist. Nach Lemma 1.6 gibt es dann einen kernreproduzierenden Hilbertraum H und ein kontraktiv, lineares und surjektives $\psi : G \rightarrow H$ mit $\ker \psi = Z^\perp$ und isometrischem $\psi|_Z : Z \rightarrow H$, wobei $Z := \text{cl span}\{k(w) : w \in \Omega\}$. Zudem gilt $k_w^H = \psi(k(w))$, $w \in \Omega$. Da beschränkte lineare Abbildungen Holomorphie erhaltend sind, ist mit $w \mapsto k(\bar{w})$ auch $\bar{\Omega} \ni w \mapsto k_w^H \in H$ holomorph und wegen Proposition 7.1 sind es auch alle $f \in H$.

Im Folgenden seien Eigenschaften erwähnt, welche die Holomorphie der Elemente eines kernreproduzierenden Hilbertraumes nach sich zieht

7.5 Fakta. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $L \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum derart, dass alle $f \in L$ holomorph sind.

1. Ist $\Lambda \subseteq \Omega$ eine Teilmenge mit mindestens einem Häufungspunkt in jeder Zusammenhangskomponente³ von Ω , so ist $\text{span}\{k_w^H : w \in \Lambda\}$ dicht in L .

In der Tat folgt aus $f \perp k_w^L$, $w \in \Lambda$, dass $f(w) = (f, k_w^L) = 0$, $w \in \Lambda$. Nach dem Identitätssatz, Satz 10.4 angewendet auf jede Zusammenhangskomponente von Ω , folgt $f = 0$; siehe Satz 10.4. Also gilt $\text{cl span}\{k_w^L : w \in \Lambda\} = \{k_w^L : w \in \Lambda\}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = L$.

2. Nach Proposition 7.1 ist die Abbildung $z \mapsto k_z^L$ antiholomorph; siehe Bemerkung 7.2. Wenden wir Lemma 1.6 auf L statt G und die Funktion $k : \Omega \rightarrow L$, $k(z) := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} k_z^L$ an, so erhalten wir einen kernreproduzierenden Hilbertraum H samt surjektiver und linearer Kontraktion $\psi : L \rightarrow H$, wobei

$$\begin{aligned} \psi(f)(z) &= (f, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} k_z^L)_L = \lim_{h \rightarrow 0} (f, \frac{1}{h} (k_{z+\bar{h}}^L - k_z^L))_L \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{h}} (f(z + \bar{h}) - f(z))_L = f'(z), \quad z \in \Omega, \end{aligned}$$

und daher $H = \{f' : f \in L\}$. Also haben wir $f \in \ker \psi$ genau dann, wenn $f \in L$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω ist, was im Fall eines Gebietes Ω genau $\ker \psi = \text{span}\{\mathbb{1}_\Omega\} \cap L$ (als Unterraum von $\mathbb{C}^\Omega$) bedeutet. Zudem gilt

$$K_H(z, w) = \psi\left(\frac{\partial k_w^L}{\partial \bar{w}}\right)(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \psi(k_w^L)\right)(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} (\psi(k_w^L)(z)) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}} K_L(z, w).$$

3. Setzen wir Ω als einfach zusammenhängend voraus, dann hat das holomorphe $\chi : \bar{\Omega} \rightarrow L$ mit $\chi(w) = k_w^L$ eine eindeutige Stammfunktion $X : \bar{\Omega} \rightarrow L$, wenn wir $X(\bar{a}) = 0$ für ein festes $a \in \Omega$ voraussetzen. Ist $\gamma_{\bar{a}, b} : [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$ für $b \in \bar{\Omega}$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma_{\bar{a}, b}(0) = \bar{a}$ und $\gamma_{\bar{a}, b}(1) = b$, dann gilt für $b \in \bar{\Omega}$

$$X(b) = \int_{\gamma_{\bar{a}, b}} \chi(\zeta) d\zeta.$$

³Diese Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn Ω ein Gebiet ist und $\Lambda \subseteq \Omega$ in Ω mindestens einen Häufungspunkt hat.

Wenden wir Lemma 1.6 auf L statt G und die Funktion $k : \Omega \rightarrow L$, $k(z) := X(\bar{z})$ an, so erhalten wir einen kernreproduzierenden Hilbertraum H samt surjektiver und linearer Kontraktion $\psi : L \rightarrow H$, wobei $\psi(f)$ wegen

$$\begin{aligned}\psi(f)(z) &= (f, X(\bar{z}))_L = (f, \int_0^1 \gamma'_{\bar{a}, \bar{z}}(t) \cdot (\chi \circ \gamma_{\bar{a}, \bar{z}})(t) dt)_L \\ &= \int_0^1 \overline{\gamma'_{\bar{a}, \bar{z}}(t)} \cdot (f, k_{\gamma_{\bar{a}, \bar{z}}(t)}^L)_L dt = \int_{\gamma_{\bar{a}, \bar{z}}} f(\zeta) d\zeta\end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f ist, die bei a verschwindet. Somit erhalten wir $\ker \psi = \{0\}$ und

$$K_H(z, w) = k_w^H(z) = \psi(X(\bar{w}))(z) = \int_{\gamma_{\bar{a}, \bar{z}}} X(\bar{w})(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{\bar{a}, \bar{z}}} \int_{\gamma_{\bar{a}, \bar{w}}} K_L(\zeta, \bar{\eta}) d\eta d\zeta,$$

weshalb $K_H(a, w) = 0 = K_H(z, a)$ und $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}} K_H(z, w) = K_L(z, w)$.

7.6 Beispiel. Der Dirichletraum $\mathcal{D}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ aus Beispiel 1.7, (3), besteht aus holomorphen Funktionen und hat die Kernfunktion $K_{\mathcal{D}(\mathbb{D})}(z, w) = \log\left(\frac{1}{1 - z\bar{w}}\right)$, $z, w \in \mathbb{D}$. Gemäß Fakta 7.5, 2, ist $\psi : \mathcal{D}(\mathbb{D}) \rightarrow \{f' : f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})\}$ linear und wegen $1_{\mathbb{D}} \notin \mathcal{D}(\mathbb{D})$ bijektiv. Versehen wir $\{f' : f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})\}$ mit dem Skalarprodukt derart, ψ isometrisch ist, so bildet $H := \{f' : f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})\}$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum mit Kernfunktion

$$K_H(z, w) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}} \log\left(\frac{1}{1 - z\bar{w}}\right) = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

Für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ mit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} z^n$, wobei $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ mit $a(0) = 0$ gilt $\|f\|_{\mathcal{D}(\mathbb{D})} = \|a\|_{\ell^2}$; siehe Beispiel 1.7, (3). Folglich haben wir $f' \in H$ mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a(n) z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \cdot a(n+1) z^n,$$

wobei $\|f'\|_H = \|f\|_{\mathcal{D}(\mathbb{D})} = \|a\|_{\ell^2}$.

7.7 Beispiel. Den kernreproduzierenden Hilbertraum aus dem vorherigen Beispiel erhalten wir auch auf die Weise, wie wir Hardyraum und Dirichletraum konstruiert haben. Dazu sei $k : \mathbb{D} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ mit $k(w)(n) = \bar{w}^n \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ist $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ die lineare Kontraktion aus Lemma 1.6, so stimmt für $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ der Funktionswert $\psi(a)(z) = (a, k(z))_{\ell^2}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit dem Grenzwert der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} a(n) z^n$ überein. Diese Reihe verschwindet für alle $z \in \mathbb{D}$ genau dann, wenn $a(n) = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, womit $\ker \psi = \{0\}$ und $\text{cl span}\{k(z) : z \in \mathbb{D}\} = \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{D}) &:= \{\psi(a) : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})\} \\ &= \{(z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} a(n) z^n) : a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})\} \end{aligned} \quad (12)$$

versehen mit einem Skalarprodukt derart, dass $\psi : \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{D})$ unitär ist, bildet somit einen kernreproduzierenden Hilbertraum, der aus analytischen Funktionen auf $\mathbb{D}$ besteht und *Bergmannraum* auf $\mathbb{D}$ genannt wird. Zudem haben wir

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{B}(\mathbb{D})}(z, w) &= k_w^{\mathcal{B}(\mathbb{D})}(z) = \psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \bar{w}^n z^n \\ &= \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) \Big|_{u=\bar{w}z} = \frac{1}{(1-\bar{w}z)^2}. \end{aligned}$$

Weierts gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C}) : \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda_2(z) < +\infty\} \quad (13)$$

und für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ die Gleichung $\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda_2(z)$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ vollständig ist, können wir $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ als abgeschlossenen Unterraum von $L^2(\mathbb{D}, \frac{1}{\pi} \lambda_2)$ betrachten, wobei ein $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ mit der Äquivalenzklasse aller mit f bis auf eine λ_2 -Nullmenge übereinstimmenden Funktionen identifiziert wird.

Bezüglich (13) haben wir $\mathcal{B}(\mathbb{D}) \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ in (12) gesehen. Für $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) z^n$, $z \in \mathbb{D}$, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $b(n) \in \mathbb{C}$ so, dass diese Potenzreihe Konvergenzradius ≥ 1 hat. Dabei gilt für $r \in (0, 1)$ wegen

der gleichmäßigen Konvergenz auf $r\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N b(n)z^n \right) \overline{\left(\sum_{m=0}^N b(m)z^m \right)} d\lambda_2(z) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{r\mathbb{D}} \sum_{n,m=0}^N b(n)\overline{b(m)} z^n \overline{z^m} d\lambda_2(z) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n,m=0}^N b(n)\overline{b(m)} \int_0^r \rho^{n+m+1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt d\rho \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |b(n)|^2 2 \int_0^r \rho^{2n+1} d\rho \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |b(n)|^2 \frac{1}{n+1} r^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)|^2 \frac{1}{n+1} r^{2n+2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (etwa mit Hilfe des Satz von der Monotonen Konvergenz für das Zählmaß auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} |b(n)|^2 \quad (\in [0, +\infty]). \quad (14)$$

Im Fall $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} a(n) z^n$ mit $a \in \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$, womit $b(n) = \sqrt{n+1} a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, die Koeffizienten der Potenzreihe für f abgeben und infolge die rechte Seite von (14) endlich ist. Im Fall, dass die linke Seite von (14) endlich ist, gehört $a : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a(n) := \frac{b(n)}{\sqrt{n+1}}$ zu $\ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C})$ und nach (12) folgt $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$.

7.8 Korollar. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, so bildet die Menge $\mathcal{B}(\Omega)$ aller holomorphen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\Omega} |f(z)|^2 d\lambda_2(z)$ einen als Unterraum von $L^2(\Omega, \lambda_2)$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum.*

Beweis. $\mathcal{B}(\Omega)$ bildet offenbar einen linearen Unterraum von $L^2(\Omega, \lambda_2)$. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{B}(\Omega)$ mit $f_n \rightarrow f \in L^2(\Omega, \lambda_2)$ bezüglich der entsprechenden $\|\cdot\|_2$ -Norm, so folgt für $w \in \Omega$ und $r > 0$ so klein, dass $w+r\mathbb{D} \subseteq \Omega$, $\|(f_n - f) \cdot \mathbb{1}_{w+r\mathbb{D}}\|_2 \rightarrow 0$,

womit auch $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$, wobei $g, g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) = f(w + rz)$ und $g_n(z) = f_n(w + rz)$ definiert sind.

Da die g_n holomorph sind, folgt aus (13), dass $g_n \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$. $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ ist abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{D}, \lambda_2)$, weshalb g äquivalent (sich also nur auf einer Nullmenge unterscheidet) zu einem $\tilde{g} \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ ist und infolge ein zu f äquivalentes $\tilde{f}$ gibt, das auf $w + r\mathbb{D}$ holomorph ist.

Wir können Ω mit abzählbar vielen Kugeln U_k , $k \in \mathbb{N}$, der Form $w + r\mathbb{D} \subseteq \Omega$ ausfüllen. Bezeichnen $\tilde{f}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ die zu f äquivalenten Funktionen, die auf U_k holomorph sind, so gilt $\tilde{f}^k|_{U_k \cap U_l} = \tilde{f}^l|_{U_k \cap U_l}$ im Fall $U_k \cap U_l \neq \emptyset$, da stetige Funktionen übereinstimmen, wenn sie am Komplement einer Nullmenge übereinstimmen – dieses Komplement ist ja dicht. Also ist durch $\tilde{f}(z) := \tilde{f}^k(z)$ mit $z \in U_k$ eine holomorphe Funktion auf Ω definiert. Wegen

$$|\tilde{f}(z) - f(z)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{f}^1(z)| + |\tilde{f}^1(z) - \tilde{f}(z)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{f}^1(z)| + \sum_{j=2}^{\infty} |\tilde{f}^j(z) - \tilde{f}^{j+1}(z)|$$

unterscheidet sich $\tilde{f}$ von f nur auf einer Nullmenge und ist daher eine zu f äquivalente und holomorphe Funktion. Also ist der Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{B}(\Omega)$ wieder in $\mathcal{B}(\Omega)$ und dieser somit abgeschlossen.

Schließlich ist $\varpi_w : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ für $w \in \Omega$ beschränkt, da für $w + r\mathbb{D} \subseteq \Omega$ die Einschränkung $.\big|_{w+r\mathbb{D}} : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(w + r\mathbb{D})$ beschränkt und $\mathcal{B}(w + r\mathbb{D})$ vermöge $T : g \mapsto (z \mapsto g(w + rz))$ bis auf eine Konstante > 0 isometrisch isomorph zu $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ ist, womit $\varpi_w = \varpi_0^{\mathcal{B}(\mathbb{D})} \circ T \circ .\big|_{w+r\mathbb{D}}$ Zusammensetzung beschränkter linearer Abbildungen ist. $\square$

8 Verkleinerung - Vergrößerung von Ω

8.1 Bemerkung. Gilt $\emptyset \neq M \subseteq \Omega$ und ist $G \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ ein kernreproduzierender Hilbertraum, so haben wir schon gesehen, dass für $.\big|_M : G \rightarrow \mathbb{C}^M$ und $Z := \text{cl span}\{k_z^H : z \in M\}$ immer $\ker .\big|_M = \{k_t^H : t \in M\}^\perp = Z^\perp$.

$H := \{f|_M : f \in Z\} = \{f|_M : f \in G\} \subseteq \mathbb{C}^M$ versehen mit $(f|_M, g|_M)_H := (f, g)_G$, $f, g \in Z$, bildet dann einen Hilbertraum und $.\big|_M : Z \rightarrow H$ einen unitären Operator. Wegen

$$(f|_M, k_w^H|_M)_H = (f, k_w^H)_G = f(w) = f|_M(w), \quad f \in Z, w \in M,$$

ist H ein kernreproduzierender Hilbertraum auf M , wobei $k_w^H = k_w^G|_M$ für $w \in M$ und infolge $K_H = K_G|_{M \times M}$.

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, hat M mindestens einen Häufungspunkt in jeder Zusammenhangskomponente von Ω und besteht G aus holomorphen Functionen, so gilt wegen des Identitätssatzes (Satz 10.4) $\ker \cdot|_M = \{0\}$ und daher $Z = G$.

8.2 Lemma. Seien $\Omega, \Theta \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete mit $\Omega \cap \Theta \neq \emptyset$ sowie $H \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ und $G \subseteq \mathbb{C}^\Theta$ kernreproduzierende Hilberträume bestehend aus holomorphen Funktionen.

Hat $M \subseteq \Omega \cap \Theta$ mindestens einen Häufungspunkt in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \cap \Theta$ und gilt $K_G(z, w) = K_H(z, w)$ für alle $z, w \in M$, so existiert ein eindeutiger kernreproduzierender Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^{\Omega \cup \Theta}$ bestehend aus holomorphen Funktionen so, dass $K_{\tilde{H}}|_{\Omega \times \Omega} = K_H$ und $K_{\tilde{H}}|_{\Theta \times \Theta} = K_G$.

Beweis. Wegen $K_{\tilde{H}}|_{\Omega \times \Omega} = K_H$ erhalten wir die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ aus Proposition 7.1 und dem Identitätssatz, Satz 10.6.

Gemäß Bemerkung 8.1 bildet $Q := \{f|_M^\Omega : f \in H\}$ versehen mit dem Skalarprodukt so, dass $\cdot|_M^\Omega : H(\subseteq \mathbb{C}^\Omega) \rightarrow Q(\subseteq \mathbb{C}^M)$ unitär ist, einen kernreproduzierenden Hilbertraum mit $k_w^Q = k_w^H|_M^\Omega$ und Kernfunktion $K_H|_{M \times M}$. Entsprechend bildet $R := \{g|_M^\Theta : g \in G\}$ versehen mit dem Skalarprodukt so, dass $\cdot|_M^\Theta : G(\subseteq \mathbb{C}^\Theta) \rightarrow Q(\subseteq \mathbb{C}^M)$ unitär ist, einen kernreproduzierenden Hilbertraum mit $k_w^R = k_w^G|_M^\Theta$ und Kernfunktion $K_G|_{M \times M}$. Aus $K_H|_{M \times M} = K_G|_{M \times M}$ folgt $Q = R$.

Für $f \in Q = R(\subseteq \mathbb{C}^M)$ sind $\hat{f} := (\cdot|_M^\Omega)^{-1}f \in H$ und $\check{f} := (\cdot|_M^\Theta)^{-1}f \in G$ offenbar Erweiterungen von f auf Ω bzw. Θ , die holomorph auf Ω bzw. Θ sind. Wegen $(\hat{f}|_{\Omega \cap \Theta})|_M = f = (\check{f}|_{\Omega \cap \Theta})|_M$ folgt aus dem Identitätssatz, Satz 10.4 $\hat{f}|_{\Omega \cap \Theta} = \check{f}|_{\Omega \cap \Theta}$, womit

$$(f, (\cdot|_M^\Omega)k_w^H)_Q = (\hat{f}, k_w^H)_H = \hat{f}(w) = \check{f}(w) = (f, (\cdot|_M^\Theta)k_w^G)_Q, \quad f \in Q,$$

und folglich $(\cdot|_M^\Omega)k_w^H = (\cdot|_M^\Theta)k_w^G$ für alle $w \in \Omega \cap \Theta$. Für $w \in M$ gilt sogar $(\cdot|_M^\Omega)k_w^H = (\cdot|_M^\Theta)k_w^G = k_w^Q$.

Somit ist $k : \Omega \cup \Theta \rightarrow Q$ durch $k(w) := (\cdot|_M^\Omega)(k_w^H)$, $w \in \Omega$, und $k(w) := (\cdot|_M^\Theta)(k_w^G)$, $w \in \Theta$, wohldefiniert, wobei $\text{cl span}\{k(w) : w \in \Omega \cup \Theta\} = Q$ wegen $k(w) = k_w^Q$ für $w \in M$. Also stellt sich $\psi : Q \rightarrow \mathbb{C}^{\Omega \cup \Theta}$ mit $\psi(f)(w) = (f, k(w))_Q$ als injektiv heraus. Nach Lemma 1.6 gibt es einen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^{\Omega \cup \Theta}$ derart,

⁴Für $M = \Omega \cap \Theta$ trifft das sicherlich zu.

dass $\psi : Q \rightarrow \tilde{H}$ unitär ist. Dabei gilt für $f \in H$

$$\check{f}(w) = ((\cdot|_M^\Theta)^{-1} f, k_w^G)_G = (f, k(w))_Q = \psi(f)(w), \quad w \in \Theta,$$

sowie

$$\hat{f}(w) = ((\cdot|_M^\Omega)^{-1} f, k_w^H)_H = (f, k(w))_Q = \psi(f)(w), \quad w \in \Omega,$$

womit $\psi(f)$ der Funktion $\hat{f} \cup \check{f}$ gleich und infolge holomorph ist. Schließlich gilt für $z, w \in \Omega$

$$\begin{aligned} K_{\tilde{H}}(z, w) &= \psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_Q \\ &= ((\cdot|_M^\Omega)(k_w^H), (\cdot|_M^\Omega)(k_z^H))_Q = (k_w^H, k_z^H)_H = K_H(z, w). \end{aligned}$$

Entsprechend zeigt man $K_{\tilde{H}}(z, w) = K_G(z, w)$, $z, w \in \Theta$. □

8.3 Bemerkung. Im Fall $\Omega = \Theta$ besagt Lemma 8.2, dass aus $K_G(z, w) = K_H(z, w)$ für alle $z, w \in M$ schon $K_G = K_H$ und daher $G = H$ folgt.

Folgendes Resultat geht in die entgegengesetzte Richtung wie Bemerkung 8.1.

8.4 Proposition. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subseteq \Omega$ mit mindestens einem Häufungspunkt in Ω und $H \subseteq \mathbb{C}^M$ ein kernreproduzierender Hilbertraum.

Lässt sich jedes $f \in H$ zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen, so bildet $\tilde{H} := \{\tilde{f} : f \in H\} (\subseteq \mathbb{C}^\Omega)$ versehen mit $(\tilde{f}, \tilde{g})_{\tilde{H}} := (f, g)_H$ einen zu H isometrisch isomorphen kernreproduzierenden Hilbertraum auf Ω , wobei die Einschränkungsabbildung $\cdot|_M : \tilde{H} \rightarrow H$ unitär und die Kernfunktion $K_{\tilde{H}} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fortsetzung der Kernfunktion $K_H : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Beweis. Da nach dem Identitätssatz, Satz 10.4 die Fortsetzung $\tilde{f}$ eines jeden $f \in H$ holomorphiebedingt eindeutig ist und infolge $\widetilde{\alpha f + \beta g} = \alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}$ gilt, bildet $\tilde{H}$ versehen mit $(\cdot, \cdot)_{\tilde{H}}$ einen zu H isometrisch isomorphen Hilbertraum bestehend aus auf Ω holomorphen Funktionen. Mit $f \mapsto \tilde{f}$ ist auch die Umkehrabbildung davon, nämlich die Einschränkungsabbildung $\cdot|_M : \tilde{H} \rightarrow H$ unitär. Können wir zeigen, dass für $w \in \Omega$ das Punktauswertungsfunktional $\varpi_w : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt ist, so bildet $\tilde{H}$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum. Trifft das dann zu, so ist wegen

$$\tilde{f}(z) = f(z) = (f, k_z^H)_H = (\tilde{f}, \tilde{k}_z^H)_{\tilde{H}}, \quad z \in M, \quad (15)$$

$\varpi_z : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{C}$ für $z \in M$ beschränkt. Zudem erhalten wir $\tilde{k}_z^H = k_z^{\tilde{H}}$ und weiters

$$K_{\tilde{H}}(z, w) = (\tilde{k}_w^H, \tilde{k}_z^H)_{\tilde{H}} = (k_w^H, k_z^H)_H = K_H(z, w), \quad z, w \in M.$$

Es bleibt die Beschränktheit von $\varpi_w : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{C}$ für $w \in \Omega \setminus M$ zu zeigen. Da Ω als Gebiet vorausgesetzt wurde, gibt es ein stetiges⁵ $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ derart, dass $\gamma(0)$ einen Häufungspunkt von M in Ω abgibt und $\gamma(1) = w \in \Omega \setminus M$ gilt. Wegen der Kompaktheit von $\gamma[0, 1]$ gilt⁶ $d(\gamma[0, 1], \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Für $r \in (0, +\infty)$ so klein, dass $r < d(\gamma[0, 1], \mathbb{C} \setminus \Omega)$, ist

$$D := \{z \in \mathbb{C} : d(z, \gamma[0, 1]) < r\}$$

wegen der Stetigkeit von $z \mapsto d(z, \gamma[0, 1])$ offen und erfüllt

$$w \in \gamma[0, 1] \cup U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0)) \subseteq D \subseteq \Omega.$$

Da es zu jedem $z \in D$ ein $t \in [0, 1]$ mit $|z - \gamma(t)| = d(z, \gamma[0, 1]) < r$ gibt und daher $z \in U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(t)) \subseteq D$ gilt, identifizieren wir D als Gebiet.

Wegen $D \subseteq \{z \in \mathbb{C} : d(z, \gamma[0, 1]) \leq r\} \subseteq \Omega$ zusammen mit der Kompaktheit der mittleren Menge sind alle $\tilde{f} \in \tilde{H}$ auf D beschränkt, womit durch

$$T : \tilde{H} \rightarrow H_b(D, \mathbb{C}), \quad T(\tilde{f}) = \tilde{f}|_D,$$

eine lineare Abbildung definiert ist. Können wir zeigen, dass T als Unterraum von $\tilde{H} \times H_b(D, \mathbb{C})$ abgeschlossen ist, so folgt dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Beschränktheit von T und damit $\varpi_w = \pi_w \circ T \in L_b(\tilde{H}, \mathbb{C})$, wobei hier π_w für die Einschränkung von $\pi_w : \ell^\infty(D, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ auf den abgeschlossenen Unterraum $H_b(D, \mathbb{C})$ von $\ell^\infty(D, \mathbb{C})$ steht.

Bezüglich der Abgeschlossenheit von T gelte in $\tilde{H} \times H_b(D, \mathbb{C})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f}_n; T\tilde{f}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f}_n; \tilde{f}_n|_D) = (\tilde{f}; h).$$

Da nach (15) Punktauswerten bei $z \in M \cap U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0))$ stetig auf $\tilde{H}$ und sowieso stetig auf $H_b(D, \mathbb{C})$ ist, stellen sich die Einschränkungen der beiden Funktionen $\tilde{f}$ und h auf $M \cap U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0))$ als punktweise Grenzwerte von $(f_n|_{M \cap U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0))})_{n \in \mathbb{N}}$ heraus, womit $\tilde{f}|_{M \cap U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0))} = h|_{M \cap U_r^{\mathbb{C}}(\gamma(0))}$. Weil D als Gebiet vorausgesetzt wurde, folgt nach dem Identitätssatz, Satz 10.4 für holomorphe Funktionen $\tilde{f}|_D = h$, was $T\tilde{f} = \tilde{f}|_D = h$ bedeutet. $\square$

⁵Man kann γ sogar als achsenparallelen Polygonzug wählen.

⁶Im Fall $\Omega = \mathbb{C}$ setzt man $d(\gamma[0, 1], \mathbb{C} \setminus \Omega) = +\infty$.

Für das folgende Resultat sei daran erinnert, dass im Sinne von Satz 10.5 holomorphe Funktionen $f : U_r^{\mathbb{C}}(0) \times U_r^{\mathbb{C}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $r > 0$ in der Form

$$f(z, w) = \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2} c_{(m,n)} z^m w^n, \quad z, w \in U_r^{\mathbb{C}}(0),$$

angeschrieben werden können, wobei obige Summe unbedingt konvergiert. Sehen wir für $0 < \varrho < r$ den Ausdruck $z^m w^n$ als Abbildung von $K_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0) \times K_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0)$ nach $\mathbb{C}$, so konvergiert obige Summe unbedingt sogar in $C_b(K_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0) \times K_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0), \mathbb{C})$ bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$. Die Koeffizienten $c_{(m,n)} \in \mathbb{C}$ sind durch $f|_{K_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0)}$ eindeutig bestimmt, wobei

$$\begin{aligned} c_{(m,n)} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{\varrho}} \int_{\gamma_{\varrho}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m+1} \cdot \zeta_2^{n+1}} d\zeta_2 d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho \exp(i\tau_1), \varrho \exp(i\tau_2))}{(\varrho \exp(i\tau_1))^m \cdot (\varrho \exp(i\tau_2))^n} d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned}$$

mit $\gamma_{\varrho}(\tau) = \varrho \exp(i\tau)$, $\tau \in [0, 2\pi]$. Zudem folgt aus einer zweimaligen Anwendung der Cauchyschen Integralformel für $z, w \in U_{\varrho}^{\mathbb{C}}(0)$

$$\begin{aligned} f(z, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho}} \frac{f(\zeta_1, w)}{\zeta_1 - z} d\zeta_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{\varrho}} \int_{\gamma_{\varrho}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z)(\zeta_2 - w)} d\zeta_2 d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho \exp(i\tau_1), \varrho \exp(i\tau_2))}{(1 - \varrho^{-1} \exp(-i\tau_1)z)(1 - \varrho^{-1} \exp(-i\tau_2)w)} d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

8.5 Lemma. Zu $b \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $K : U_r^{\mathbb{C}}(b) \times U_r^{\mathbb{C}}(b) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass $U_r^{\mathbb{C}}(b) \times U_r^{\mathbb{C}}(\bar{b}) \ni (z; w) \mapsto K(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihenentwicklung

$$K(z + b, w + b) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2} c_{\alpha} z^{\alpha_1} \bar{w}^{\alpha_2}, \quad z, w \in U_r^{\mathbb{C}}(0) \quad (16)$$

ist. Falls $M \subseteq U_r^{\mathbb{C}}(b)$ den Punkt b als Häufungspunkt hat, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- $K|_{M \times M}$ ist Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf M .
- K ist Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf $U_r^{\mathbb{C}}(b)$.
- $(c_{(m,n)})_{m,n=1,\dots,N} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ist positiv semidefinit für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zunächst halten wir $\varrho \in (0, r)$ fest. Wenden wir die Überlegungen vor der aktuellen Aussage an auf $f(z, w) := K(z + b, \bar{w} + b)$ und substituieren $\tau_1 \rightsquigarrow -\tau_1$, so erhalten wir

$$c_{(m,n)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\varrho \exp(-i\tau_1) + b, \varrho \exp(-i\tau_2) + b)}{(\varrho \exp(-i\tau_1))^m \cdot (\varrho \exp(i\tau_2))^n} d\tau_2 d\tau_1 \quad (17)$$

und $(z, w \in U_\varrho^\mathbb{C}(0))$

$$K(z + b, \bar{w} + b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\varrho \exp(-i\tau_1) + b, \varrho \exp(-i\tau_2) + b)}{(1 - \varrho^{-1} \exp(i\tau_1)z)(1 - \varrho^{-1} \exp(-i\tau_2)w)} d\tau_2 d\tau_1. \quad (18)$$

$[\cdot, \cdot] : C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}) \times C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $(\phi, \psi \in C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}))$

$$[\phi, \psi] := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varrho \exp(-i\tau_1) + b, \varrho \exp(-i\tau_2) + b) \cdot \phi(\tau_1) \cdot \overline{\psi(\tau_2)} d\tau_2 d\tau_1$$

ist offenbar sesquilinear und wegen

$$|[\phi, \psi]| \leq \max_{\zeta, \eta \in K_\varrho(b)} |K(\zeta, \eta)| \cdot \|\phi\|_\infty \cdot \|\psi\|_\infty$$

beschränkt, also stetig.

Wir definieren ϕ_j , $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, und ψ_ζ , $\zeta \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)$, in $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$ durch

$$\phi_j(\tau) = \varrho^{-j} \exp(ij\tau) \quad \text{and} \quad \psi_\zeta(\tau) = (1 - \exp(i\tau) \frac{\zeta}{\varrho})^{-1}, \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

und erhalten aus (17), (18)

$$[\phi_m, \phi_n] = c_{(m,n)} \quad \text{and} \quad [\psi_z, \psi_w] = K(z + b, w + b).$$

Folglich gilt

$$[\phi, \phi] = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n c_{(m,n)}, \quad [\psi, \psi] = \sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n K(w_m + b, w_n + b) \quad (19)$$

für die Linearkombinationen

$$\phi(\tau) = \sum_{m=1}^N \bar{\lambda}_m \phi_m \quad \text{und} \quad \psi(\tau) = \sum_{m=1}^N \bar{\lambda}_m \psi_{w_m},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ und $w_1, \dots, w_N \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)$.

Für $\zeta \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)$ haben wir

$$\psi_\zeta = (1 - \exp(i \cdot \frac{\zeta}{\varrho}))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\zeta^j}{\varrho^j} \exp(ij) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j \cdot \phi_j \quad (20)$$

mit einer absolut konvergenten Reihe im Banachraum $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$. In $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$ gilt daher

$$\psi_\zeta \in \mathcal{L} := \text{cl span}\{\phi_j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \quad (21)$$

Zudem ist $G : U_\varrho^\mathbb{C}(0) \rightarrow C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit $G(\zeta) = \psi_\zeta$ nach (20) holomorph.

Erfüllt $\mu \in C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})'$ die Gleichung $\mu(G(\zeta)) = 0$, $\zeta \in M \cap U_\varrho^\mathbb{C}(0)$, so folgt $\mu(G(\zeta)) = 0$, $\zeta \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)$, aus dem Identitätssatz, Satz 10.4 und wegen (20) auch $\mu(\phi_j) = 0$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für die jeweiligen Annihilatoren erhalten wir

$$\{\psi_\zeta : \zeta \in M\}^\perp \subseteq \{\psi_\zeta : \zeta \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)\}^\perp \subseteq \{\phi_j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}^\perp.$$

Da ${}^\perp(\mathcal{R}^\perp)$ als Teilmenge von $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit $\text{cl span } \mathcal{R}$ für jedes $\mathcal{R} \subseteq C_b([0, 2\pi], \mathbb{C})$ übereinstimmt, folgt zusammen mit (21)

$$\mathcal{L} \supseteq \text{cl span}\{\psi_\zeta : \zeta \in M\} \supseteq \text{cl span}\{\psi_\zeta : \zeta \in U_\varrho^\mathbb{C}(0)\} \supseteq \mathcal{L},$$

also Gleichheit.

Wenn eine der drei Aussagen, deren Äquivalenz es zu beweisen gilt, zutrifft, dann gilt wegen (19) zusammen mit der Stetigkeit von $[\cdot, \cdot] : C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}) \times C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ die Ungleichung $[\theta, \theta] \geq 0$ für alle $\theta \in \mathcal{L}$ und zwar für jedes $\varrho \in (0, r)$. Eine neuerliche Anwendung von (19) wieder für alle $\varrho \in (0, r)$ zeigt, dass damit alle drei Aussagen gelten. $\square$

8.6 Proposition. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und habe $M \subseteq \Omega$ mindestens einen Häufungspunkt in Ω . Ist $O \subseteq \mathbb{C}^2$ ein Gebiet mit

$$\{(z; \bar{z}) : z \in \Omega\} \cup (M \times \bar{M}) \subseteq O \subseteq \Omega \times \bar{\Omega}$$

und $F : O \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph derart, dass $F(z, \bar{w})$, $z, w \in M$, die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf M abgibt, so gibt es einen eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ bestehend aus holomorphen Funktionen derart, dass

$$K_{\tilde{H}}(z, \bar{w}) = F(z, w), \quad (z; w) \in O.$$

Beweis. Seien $b \in \Omega$ ein Häufungspunkt von M und $r > 0$ mit $U_r^\mathbb{C}(b) \subseteq \Omega$ sowie $U_r^\mathbb{C}(b) \times U_r^\mathbb{C}(\bar{b}) \subseteq O$. Für $K(z, w) := F(z, \bar{w})$, $z, w \in U_r^\mathbb{C}(b)$, gelten die Grundvoraussetzungen von Lemma 8.5. Voraussetzungsgemäß und wegen Bemerkung 8.1 ist $K|_{(M \cap U_r^\mathbb{C}(b)) \times (M \cap U_r^\mathbb{C}(\bar{b}))}$ Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf $M \cap U_r^\mathbb{C}(b)$, wobei diese Menge b als Häufungspunkt hat. Nach Lemma 8.5 ist dann K die Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes auf $U_r^\mathbb{C}(b)$, der aus holomorphen Funktionen besteht.

Bezeichne $\mathcal{X}$ die Menge aller $\Theta := U_r^\mathbb{C}(b)$ enthaltenden Gebiete $\Xi \subseteq \Omega$ derart, dass es einen kernreproduzierenden Hilbertraum $H_\Xi \subseteq \mathbb{C}^\Xi$ mit $K_{H_\Xi}|_{\Theta \times \Theta} = K$ bestehend aus holomorphen Funktionen gibt. Offenbar gilt $\Theta \in \mathcal{X}$. Nach dem Identitätssatz, Satz 10.6 ist K_{H_Ξ} und infolge H_Ξ eindeutig durch $\Xi \in \mathcal{X}$ bestimmt. Zudem folgt aus $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{X}$ mit $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$, dass $K_{H_{\Xi_2}}|_{\Xi_1 \times \Xi_1} = K_{H_{\Xi_1}}$.

Ist $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ total geordnet, so bildet $\Lambda := \bigcup_{\Xi \in \mathcal{T}} \Xi$ ein Gebiet und $K_\Lambda := \bigcup_{\Xi \in \mathcal{T}} K_{H_\Xi}$ eine komplexwertige Funktion auf $\Lambda \times \Lambda$. Da für $w_1, \dots, w_N \in \Lambda$ immer $w_1, \dots, w_N \in \Xi$ für ein $\Xi \in \mathcal{T}$, überträgt sich wegen Satz 1.13 die Eigenschaft, Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes sein, von den K_{H_Ξ} auf K_Λ , womit $K_\Lambda = K_{H_\Lambda}$ für einen kernreproduzierenden Hilbertraum H_Λ auf Λ . Da die Holomorphie in mehreren Variablen eine lokale Eigenschaft ist, vererbt sich diese von den Funktionen $\Xi \times \bar{\Xi} \ni (z; w) \mapsto K_{H_\Xi}(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$ auf $\Lambda \times \bar{\Lambda} \ni (z; w) \mapsto K_{H_\Lambda}(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$, weshalb H_Λ aus holomorphen Funktionen besteht; siehe Proposition 7.1.

Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathcal{X}$ ein maximales Gebiet Δ . Im Fall $\Omega = \Delta$ setzen wir $\tilde{H} := H_\Delta$ und erhalten $F(z, w) = K(z, \bar{w}) = K_{\tilde{H}}(z, \bar{w})$ für alle $(z; w) \in \Theta \times \bar{\Theta} (\subseteq O)$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen in mehreren Variablen, Satz 10.6 folgt $F(z, w) = K_{\tilde{H}}(z, \bar{w})$ für alle $(z; w) \in O (\subseteq \Omega \times \bar{\Omega})$. Dass $\tilde{H}$ eindeutig mit dieser Eigenschaft ist, folgt auch aus diesem Identitätssatz.

Im Fall $\Delta \subsetneq \Omega$ wollen wir einen Widerspruch herleiten. Weil Δ offen ist, gilt $\Delta \cap \text{cl}(\Omega \setminus \Delta) \subseteq \Delta \cap \text{cl}(\mathbb{C} \setminus \Delta) = \emptyset$. Folglich haben wir für das zusammenhängende Ω notwendigerweise $\text{cl}(\Delta) \cap \Omega \setminus \Delta \neq \emptyset$. Seien $a \in \text{cl}(\Delta) \cap \Omega \setminus \Delta$ und $s > 0$ so, dass $U_{2s}^{\mathbb{C}}(a) \subseteq \Omega$, $U_{2s}^{\mathbb{C}}(a) \times U_{2s}^{\mathbb{C}}(\bar{a}) \subseteq O$. Für $c \in U_s^{\mathbb{C}}(a) \cap \Delta$ ($\neq \emptyset$) und hinreichend kleines $\delta \in (0, s)$ gilt

$$a \in U_s^{\mathbb{C}}(c) \subseteq U_{2s}^{\mathbb{C}}(a) \subseteq \Omega, \quad U_{\delta}^{\mathbb{C}}(c) \subseteq \Delta, \quad U_{\delta}^{\mathbb{C}}(c) \times U_{\delta}^{\mathbb{C}}(\bar{c}) \subseteq O.$$

Nach Bemerkung 8.1 ist $K_{H_{\Delta}}|_{U_{\delta}^{\mathbb{C}}(c) \times U_{\delta}^{\mathbb{C}}(\bar{c})}$ Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes. Weil

$$U_s^{\mathbb{C}}(c) \times U_s^{\mathbb{C}}(\bar{c}) \ni (z; w) \mapsto K_{H_{\Delta}}(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$$

nach Proposition 7.1 holomorph ist, können wir Lemma 8.5 anwenden, wo das dortige K die Funktion $K_{H_{\Delta}}|_{U_s^{\mathbb{C}}(c) \times U_s^{\mathbb{C}}(\bar{c})}$, und das dortige M unsere Menge $U_{\delta}^{\mathbb{C}}(c)$ ist, und erhalten, dass auch $K_{H_{\Delta}}|_{U_s^{\mathbb{C}}(c) \times U_s^{\mathbb{C}}(\bar{c})}$ Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes ist.

Gemäß Lemma 8.2, wo das dortige M wieder unsere Menge $U_{\delta}^{\mathbb{C}}(c)$ ist, gibt es einen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^{\Delta \cup U_s^{\mathbb{C}}(c)}$ bestehend aus holomorphen Funktionen mit $K_{\tilde{H}}|_{\Delta \times \Delta} = K_{H_{\Delta}}$, weshalb auch $K_{\tilde{H}}|_{\emptyset \times \emptyset} = K$. Wegen $a \in U_s^{\mathbb{C}}(c) \setminus \Delta$ gilt hier $\Delta \cup U_s^{\mathbb{C}}(c) \supsetneq \Delta$, was aber einen Widerspruch zur Maximalität von Δ bedeutet. $\square$

Wir fassen Bemerkung 8.1, Proposition 8.4, Bemerkung 8.3 und Proposition 8.6 in folgendem Satz zusammen.

8.7 Satz. *Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, hat $M \subseteq \Omega$ mindestens einen Häufungspunkt in Ω und ist $H \subseteq \mathbb{C}^M$ ein kernreproduzierender Hilbertraum, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) *Es gibt einen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^{\Omega}$ bestehend aus holomorphen Funktionen mit $K_{\tilde{H}}|_{M \times M} = K_H$.*
- (ii) *Es gibt ein Gebiet $O \subseteq \mathbb{C}^2$ mit*

$$\{(z; \bar{z}) : z \in \Omega\} \cup (M \times \bar{M}) \subseteq O \subseteq \Omega \times \bar{\Omega}$$

und ein holomorphes $F : O \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $F(z, \bar{w}) = K_H(z, w)$, $z, w \in M$.

(iii) Jedes $f \in H$ hat eine Fortsetzung $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die holomorph ist.

Sollten diese Aussagen zutreffen, so ist der Raum $\tilde{H}$ in der ersten Aussage eindeutig durch $K_{\tilde{H}}|_{M \times M} = K_H$ bestimmt, und für die Funktion F in (ii) gilt sogar $F(z, w) = K_{\tilde{H}}(z, \bar{w})$, $(z; w) \in O$.

8.8 Beispiel. Wie wir in Beispiel 3.6 gesehen haben, ist für ein holomorphes $h : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|h\|_\infty \leq 1$

$$K_H(z, w) = \frac{1 - h(z) \cdot \overline{h(w)}}{2\pi i(\bar{w} - z)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^+, \quad (22)$$

Kernfunktion eines kernreproduzierenden Hilbertraumes H , der in $H_2(\mathbb{C}^+)$ kontraktiv eingebettet ist und folglich aus holomorphen Funktionen besteht, was wir mit Hilfe von Proposition 7.1 auch aus (22) erhalten.

Wir setzen $M := \mathbb{C}^+$ und nehmen h als holomorph fortsetzbar auf ein offenes Gebiet $G \supseteq \mathbb{C}^+$ derart an, dass $|h(x)| = 1$ für alle $x \in G \cap \mathbb{R}$ ($\neq \emptyset$). Die auf $G \cap \bar{G}$ definierte holomorphe Funktion $h(z) \cdot \overline{h(\bar{z})}$, $z \in G \cap \bar{G}$, stimmt dann auf $G \cap \mathbb{R}$ ($\subseteq G \cap \bar{G}$) und infolge des Identitätssatzes auf ganz $G \cap \bar{G}$ mit der Konstanten Funktion $\mathbb{1}_{G \cap \bar{G}}$ überein, weshalb h auf $G \cap \bar{G}$ keine Nullstellen hat. Mit N bezeichnen wir die Menge der Nullstellen von h in $G \setminus \bar{G}$ ($\subseteq \mathbb{C}^+$).

Für $z \in (\overline{G \setminus N}) \setminus G$ ($\subseteq \mathbb{C}^-$) setzen wir $h(z) := \frac{1}{\overline{h(\bar{z})}}$ und erhalten eine wohldefinierte Abbildung $h : (\overline{G \setminus N}) \cup G \rightarrow \mathbb{C}$, die Nullstellen nur in $G \setminus \bar{G}$ hat. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, stellt sich die Fortsetzung von h als holomorph heraus. Dabei gilt $h(z) = \frac{1}{\overline{h(\bar{z})}}$ für $z \in (G \setminus N) \cup (\overline{G \setminus N})$. Man beachte, dass

$$\Omega := (\overline{G \setminus N}) \cup G = \mathbb{C}^+ \cup (G \cap \mathbb{R}) \cup (\mathbb{C}^- \setminus \bar{N}) \quad (\supseteq G \cap \bar{G}),$$

wobei $\bar{N}$ eine in $\mathbb{C}^- \cup (G \cap \mathbb{R})$ isolierte Teilmenge von $\mathbb{C}^-$ abgibt.

Zu jedem $x \in G \cap \mathbb{R}$ setzen wir $\delta_x := \min(1, d(x, \mathbb{R} \setminus (G \cap \bar{G})))$, womit $U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x) \subseteq G \cap \bar{G}$. Die Menge

$$O := (\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^-) \cup ((\mathbb{C}^- \setminus \bar{N}) \times (\mathbb{C}^+ \setminus N)) \cup \bigcup_{x \in G \cap \mathbb{R}} U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x) \times U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x)$$

enthält sowohl $M \times \overline{M} = \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^-$ als auch $\{(z; \bar{z}) : z \in \Omega\}$. Zudem gilt $O \subseteq \Omega \times \overline{\Omega}$. Wir wollen zeigen, dass $F : O \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{1-h(z)\cdot\overline{h(\bar{w})}}{2\pi i(w-z)}, & z \neq w, \\ \overline{h(\bar{w})} \cdot \frac{h'(w)}{2\pi i}, & z = w, \end{cases} \quad (23)$$

welche eine Fortsetzung von

$$\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^- = M \times \overline{M} \ni (z; w) \mapsto K_H(z, \bar{w}) \in \mathbb{C}$$

darstellt, holomorph auf O ist. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, reicht es, für $(a; b) \in O$ eine offene Umgebung $U_{(a;b)}$ davon mit $U_{(a;b)} \subseteq O$ derart zu finden, dass F darauf holomorph ist.

Im Fall $(a; b) \in U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x) \times U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x)$ mit einem $x \in G \cap \mathbb{R}$ gilt für ungleiche $z, w \in U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x)$ wegen $\overline{h(\bar{w})} \cdot h(w) = 1$

$$F(z, w) = \overline{h(\bar{w})} \cdot \frac{h(w) - h(z)}{2\pi i(w - z)},$$

weshalb

$$F(z, w) = \frac{\overline{h(\bar{w})}}{2\pi i} \int_0^1 h'(z + s(w - z)) ds.$$

Wir identifizieren F auf $U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x) \times U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x)$ als stetig und komponentweise holomorph, also holomorph.

Liegt $(a; b)$ in keinem der $U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x) \times U_{\delta_x}^{\mathbb{C}}(x)$, dann gilt $(a; b) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^-$ oder $(a; b) \in (\mathbb{C}^- \setminus \overline{N}) \times (\mathbb{C}^+ \setminus N)$. Im ersten Fall setzen wir $U_{(a;b)} := \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^-$ und im zweiten $U_{(a;b)} := (\mathbb{C}^- \setminus \overline{N}) \times (\mathbb{C}^+ \setminus N)$. Weil für $(z; w) \in U_{(a;b)}$ jedenfalls $z \neq w$, haben wir $F(z, w) = \frac{1-h(z)\cdot\overline{h(\bar{w})}}{2\pi i(w-z)}$, was sich wieder als stetig auf $U_{(a;b)}$ und dort als komponentweise holomorph erweist.

Also können wir Satz 8.7 anwenden und erhalten einen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{C}^\Omega$ mit $K_{\tilde{H}}|_{M \times M} = K_H$, ja sogar $K_{\tilde{H}}(z, \bar{w}) = F(z, w)$, $(z; w) \in O$. Unschwer lässt sich zeigen, dass dann

$$K_{\tilde{H}}(z, w) = \begin{cases} \frac{1-h(z)\cdot\overline{h(\bar{w})}}{2\pi i(\bar{w}-z)}, & z \neq \bar{w}, \\ \overline{h(\bar{w})} \cdot \frac{h'(w)}{2\pi i}, & z = \bar{w}, \end{cases}$$

sogar für alle $z, w \in \Omega$.

9 Hilbertraumwertige kernreproduzierende Hilberträume

9.1 Bemerkung. Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $d \in \mathbb{N}$. Ein Hilbertraum H über $\mathbb{K}$, dessen Elemente Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^d$ sind, also $H \subseteq (\mathbb{K}^d)^\Omega$ versehen mit der punktweisen Addition und skalare Multiplikation, heißt *d-vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum*, falls für alle $t \in \Omega$ die lineare Abbildung $H \ni f \mapsto f(t) \in \mathbb{K}^d$ beschränkt ist.

Offenbar können wir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^d$ als Funktion $\tilde{f} : \Omega \times \{1, \dots, d\} \rightarrow \mathbb{K}$ interpretieren, indem wir $\tilde{f}(t, k) = f(t)(k)$ für $t \in \Omega$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ setzen. Zudem ist eine lineare Abbildung $A : H \rightarrow \mathbb{K}^d$ genau dann beschränkt, wenn die linearen Abbildungen $\pi_k \circ A : H \rightarrow \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, d$, alle beschränkt sind.

Also lässt sich ein *d-vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum* H auf Ω als ein kernreproduzierender Hilbertraum auf der Menge $\Omega \times \{1, \dots, d\}$ gemäß Definition 1.1 betrachten. Sind dann die $k_{(t,k)}^H \in H$ gemäß Bemerkung 1.2 für $(t, k) \in \Omega \times \{1, \dots, d\}$ definiert, so ist für $\tilde{f} \in H \subseteq \mathbb{K}^{\Omega \times \{1, \dots, d\}}$ die entsprechende Funktion $f \in (\mathbb{K}^d)^\Omega$ gegeben durch

$$f(t) \mapsto \begin{pmatrix} (\tilde{f}, k_{(t,1)}^H)_H \\ \vdots \\ (\tilde{f}, k_{(t,d)}^H)_H \end{pmatrix}.$$

Die dazugehörige Kernfunktion $\tilde{K} : \Omega \times (\{1, \dots, d\}) \times (\Omega \times \{1, \dots, d\}) \rightarrow \mathbb{K}$ von $H \subseteq \mathbb{K}^{\Omega \times \{1, \dots, d\}}$ lässt sich auch als $d \times d$ -matrixwertige Abbildung $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$ auffassen, wobei

$$K(s, t) = \left(k_{(t,j)}^H(s, i) \right)_{i,j=1, \dots, d} = \left(K((s, i), (t, j)) \right)_{i,j=1, \dots, d}.$$

Wir wollen im Folgenden entsprechende Aussagen für Hilberträume machen, deren Elemente Funktionen mit Werten in einem gewissen Hilbertraum sind.

9.2 Definition. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und L ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Ein Hilbertraum H über $\mathbb{K}$, dessen Elemente Funktionen $f : \Omega \rightarrow L$ sind, also $H \subseteq L^\Omega$ versehen mit der punktweisen Addition und skalare Multiplikation, heißt *L-vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum*, falls für alle $t \in \Omega$ die lineare Abbildung $\varpi_t : H \rightarrow L$ mit $\varpi_t(f) := f(t)$ beschränkt ist, also $\varpi_t \in L_b(H, L)$ gilt.

9.3 Fakta. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und L ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

1. Ist H ein L -vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum über Ω und $t \in \Omega$, so gilt für $k_t^H := \varpi_t^* \in L_b(L, H)$ und $f \in H$

$$(\varpi_t(f), x)_L = (f, k_t^H x)_H, \quad f \in H, x \in L.$$

Die Abbildungen $k_t^H \in L_b(L, H)$, $t \in \Omega$, entsprechen den in Bemerkung 1.2 beschriebenen Elementen und erfüllen $\{k_t^H x : t \in \Omega, x \in L\}^\perp = \bigcap_{t \in \Omega} \ker \varpi_t = \{0\}$.

2. Ist G ein beliebiger Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $k : \Omega \rightarrow L_b(L, G)$ eine Funktion, so wird durch

$$\psi(a) := (t \mapsto k(t)^* a), \quad a \in G,$$

eine lineare Abbildung $\psi : G \rightarrow L^\Omega$ definiert. Dabei gilt $\psi(a) = 0$ genau dann, wenn $a \in \ker k(t)^* = k(t)(L)^\perp$ für alle $t \in \Omega$, womit $\ker \psi = \{k(t)x : t \in \Omega, x \in L\}^\perp$. Auf $Z := (\ker \psi)^\perp = \text{cl span}\{k(t)x : t \in \Omega, x \in L\}$ ist ψ infolge injektiv, weshalb durch $H := \psi(Z) \subseteq L^\Omega$ und $(f, g)_H := (\psi|_Z^{-1} f, \psi|_Z^{-1} g)_G$ ein zu Z isometrisch isomorpher Hilbertraum definiert wird. Dabei gilt

$$\varpi_t f = f(t) = k(t)^* \psi|_Z^{-1} f,$$

womit $\varpi_t = k(t)^* \psi|_Z^{-1} \in L_b(H, L)$. Also ist H ein L -vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum mit $k_t^H = \varpi_t^* = \psi k(t)$.

3. Die Kernfunktion $K_H : \Omega \times \Omega \rightarrow L_b(L)$ eines L -vektorwertigen kernreproduzierenden Hilbertraum H auf Ω wird definiert durch

$$K_H(s, t) := \varpi_s k_t^H = (k_s^H)^* k_t^H.$$

Offenbar gilt $K_H(s, t)^* = K_H(t, s)$, $s, t \in \Omega$. Zudem haben wir

$$\sum_{m,n=1}^N (K_H(t_m, t_n) x_n, x_m)_L = \sum_{m,n=1}^N ((k_{t_m}^H)^* k_{t_n}^H x_n, x_m)_L = \left(\sum_{n=1}^N k_{t_n}^H x_n, \sum_{m=1}^N k_{t_m}^H x_m \right)_L,$$

und daher für $K = K_H$

$$\sum_{m,n=1}^N (K(t_m, t_n) x_n, x_m)_L \geq 0, \quad N \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_N \in \Omega, x_1, \dots, x_N \in L. \quad (24)$$

4. Sei umgekehrt $K : \Omega \times \Omega \rightarrow L_b(L)$ eine Funktion, für die $K(s, t)^* = K(t, s)$, $s, t \in \Omega$, und (24) zutrifft. Die durch $\tilde{K}((s, x), (t, y)) := (K(s, t)y, x)_L$ definierte Funktion $\tilde{K} : (\Omega \times L) \times (\Omega \times L) \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt $\tilde{K}((s, x), (t, y)) = (K(s, t)y, x)_L = \overline{(K(t, s)x, y)_L} = \overline{\tilde{K}((t, y), (s, x))}$ und für $N \in \mathbb{N}; (t_1, x_1), \dots, (t_N, x_N) \in \Omega \times L; \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$

$$\sum_{m,n=1}^N \bar{\lambda}_m \lambda_n \tilde{K}((t_m, x_m), (t_n, x_n)) = \sum_{m,n=1}^N (K(t_m, t_n)(\lambda_n x_n), \lambda_m x_m)_L \geq 0, \quad (25)$$

weshalb es nach Satz 1.13 einen kernreproduzierenden Hilbertraum $\tilde{H} \subseteq \mathbb{K}^{\Omega \times L}$ mit Kernfunktion $\tilde{K}$ gibt.

Wir halten $t \in \Omega$ fest. Für $\tilde{f} = \tilde{K}(\cdot, (r, z)) = k_{(r,z)}^{\tilde{H}}$ gilt

$$\tilde{f}(t, \alpha x + \beta y) = \tilde{K}((t, \alpha x + \beta y), (r, z)) = (K(t, r)z, \alpha x + \beta y)_L = \bar{\alpha} \tilde{f}(t, x) + \bar{\beta} \tilde{f}(t, y).$$

Da die Punktauswertungen bei $(t, \alpha x + \beta y)$, (t, x) , (t, y) linear und auch stetig sind, gilt diese Gleichung für alle $\tilde{f} \in \text{cl span}\{k_{(r,z)}^{\tilde{H}} : (r, z) \in \Omega \times L\} = \tilde{H}$; siehe Lemma 1.5. Die Funktion $[\cdot, \cdot] : L \times \tilde{H} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $[x, \tilde{f}] = \overline{\tilde{f}(t, x)}$ ist folglich linear in x und offenbar konjugiert linear in $\tilde{f}$. Wegen

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t, x)|^2 &= |(\tilde{f}, k_{(t,x)}^{\tilde{H}})|^2 \leq \|k_{(t,x)}^{\tilde{H}}\|^2 \|\tilde{f}\|^2 = \tilde{K}((t, x), (t, x)) \|\tilde{f}\|^2 \\ &= |(K(t, t)x, x)_L| \|\tilde{f}\|^2 \leq \|K(t, t)\| \|x\|^2 \|\tilde{f}\|^2 \end{aligned}$$

ist $[\cdot, \cdot]$ eine beschränkte Sesquilinearform und wir erhalten nach Satz 10.2 ein $k(t) \in L_b(L, \tilde{H})$ mit $(k(t)x, \tilde{f})_L = \overline{\tilde{f}(t, x)}$, $x \in L$, $\tilde{f} \in \tilde{H}$, und infolge $k(t)x = k_{(t,x)}^{\tilde{H}}$.

Für $k : \Omega \rightarrow L_b(L, \tilde{H})$ gilt daher $\{k(t)x : x \in L, t \in \Omega\}^\perp = \{0\}$, weshalb gemäß 2 durch $\psi : \tilde{H} \rightarrow L^\Omega$ mit $\psi(\tilde{f}) = (t \mapsto k(t)^* \tilde{f})$ und $H := \psi(\tilde{H}) \subseteq L^\Omega$ ein L -vektorwertiger kernreproduzierender Hilbertraum H auf Ω mit $k_t^H = \psi k(t)$ definiert ist. Aus

$$\begin{aligned} (K_H(s, t)y, x)_L &= (k_s^{H*} k_t^H y, x)_L = (k_t^H y, k_s^H x)_H = (k(t)y, k(s)x)_{\tilde{H}} \\ &= (k_{(t,y)}^{\tilde{H}}, k_{(s,x)}^{\tilde{H}})_{\tilde{H}} = \tilde{K}((s, x), (t, y)) = (K(s, t)y, x)_L, \quad x, y \in L, \end{aligned}$$

folgt $K_H(s, t) = K(s, t)$ für alle $s, t \in \Omega$.

5. Stimmen die Kernfunktionen $K_{H_1}, K_{H_2} : \Omega \times \Omega \rightarrow L_b(L)$ von L -vektorwertigen kernreproduzierenden Hilberträumen H_1, H_2 überein, so folgt für $t_1, \dots, t_N \in \Omega$ und $x_1, \dots, x_N \in L$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N k_{t_n}^{H_1} x_n \right\|_{H_1}^2 &= \sum_{m,n=1}^N (K_{H_1}(t_m, t_n) x_n, x_m)_L \\ &= \sum_{m,n=1}^N (K_{H_2}(t_m, t_n) x_n, x_m)_L = \left\| \sum_{n=1}^N k_{t_n}^{H_2} x_n \right\|_{H_2}^2. \end{aligned}$$

$T := \text{cl span}\{(k_t^{H_1} x; k_t^{H_2} x) : t \in \Omega, x \in L\}$ bildet daher eine lineare und isometrische Abbildung von $\text{cl span}\{k_t^{H_1} x : t \in \Omega, x \in L\} = H_1$ auf $\text{cl span}\{k_t^{H_2} x : t \in \Omega, x \in L\} = H_2$. Ist $f \in H_1$, so gilt für $x \in L, t \in \Omega$,

$$((Tf)(t), x)_L = (Tf, k_t^{H_2} x)_{H_2} = (Tf, Tk_t^{H_1} x)_{H_2} = (f, k_t^{H_1} x)_{H_1} = (f(t), x)_L,$$

womit $Tf = f$ und folglich $H_2 = T(H_1) = H_1$ als Teilmenge von L^Ω sowie $T = \text{id}_{H_1}$.

10 Anhang

Wir bringen hier einige der oben verwendeten Resultate, die üblicherweise eher nicht in den Vorlesungen gebracht werden.

10.1 Lax-Milgram etwas allgemeiner

10.1 Definition. Seien X_1, X_2 zwei normierte Räume über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Sesquilinearform $[\cdot, \cdot] : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $c \in [0, +\infty)$ gibt mit

$$|[x, y]| \leq c \|x\| \|y\| \quad \text{für alle } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2. \quad (26)$$

Das kleinste derartige $c \geq 0$ heißt *Norm der Sesquilinearform* $[\cdot, \cdot]$ und wird mit $\|[\cdot, \cdot]\|$ bezeichnet.

Da das Infimum aller (26) erfüllenden $c \geq 0$ wieder (26) erfüllt, ist $\|[\cdot, \cdot]\|$ wohldefiniert.

Wie man leicht nachprüft, ist eine beschränkte Sesquilinearform als Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{K}$ stetig.

10.2 Satz (Lax-Milgram). *Seien H_1, H_2 Hilberträume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Sesquilinearform $[\cdot, \cdot] : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann beschränkt bezüglich der von den Skalarprodukten erzeugten Normen, wenn es ein $B \in L_b(H_1, H_2)$ mit*

$$[x, y] = (Bx, y)_{H_2} \quad \text{für alle } x \in H_1, y \in H_2,$$

gibt. Die Abbildung⁷ $B \mapsto (B, \cdot)_{H_2}$ von $L_b(H_1, H_2)$ in den Vektorraum aller beschränkten Sesquilinearformen auf $H_1 \times H_2$ ist dabei linear, bijektiv und erfüllt $\|B\| = \|[\cdot, \cdot]\|$.

Beweis. Offenbar bildet der Raum aller beschränkten Sesquilinearformen auf $H_1 \times H_2$ bezüglich der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Für $B \in L_b(H_1, H_2)$ gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|(Bx, y)| \leq \|Bx\| \|y\| \leq \|B\| \|y\| \|x\| \quad \text{für alle } x \in H_1, y \in H_2,$$

womit $\|(B, \cdot)\| \leq \|B\|$ und sich $B \mapsto (B, \cdot)$ als offensichtlich lineare Abbildung von $L_b(H_1, H_2)$ in den Vektorraum aller beschränkten Sesquilinearformen herausstellt. Gilt dabei $(Bx, y) = 0$ für alle $x \in H_1, y \in H_2$, so folgt aus zunächst $Bx = 0$ für alle $x \in H_1$ und damit $B = 0$, weshalb sich $B \mapsto (B, \cdot)$ als injektiv erweist.

Um die Surjektivität zu zeigen, sei $[\cdot, \cdot] : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{K}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Für $x \in H_1$ ist die Abbildung

$$L_x : \begin{cases} H_2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ y & \mapsto [x, y] \end{cases}$$

linear und erfüllt $|L_x(y)| = |[x, y]| \leq \|[\cdot, \cdot]\| \|x\| \|y\|$, also $\|L_x\| \leq \|[\cdot, \cdot]\| \|x\|$. Wie man unmittelbar aus der Definition erkennt, gilt $L_{x_1+x_2} = L_{x_1} + L_{x_2}$ und $L_{\alpha x} = \bar{\alpha} L_x$ für $x_1, x_2, x \in H_1$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Also ist die Abbildung $\Psi : H_1 \rightarrow H'_2$ mit $\Psi(x) := L_x$ konjugiert linear und erfüllt $\|\Psi x\| \leq \|[\cdot, \cdot]\| \|x\|$.

⁷Im Fall $[\cdot, \cdot] = (B, \cdot)$ nennt man B den *Gram-Operator* der Sesquilinearform $[\cdot, \cdot]$ bezüglich $(\cdot, \cdot)$.

Bezeichnet $\Phi : H_2 \rightarrow H'_2$ die konjugiert lineare und normtreue Abbildung aus dem Satz von Riesz-Fischer, dann ist $B := \Phi^{-1} \circ \Psi : H_1 \rightarrow H_2$ linear und erfüllt $\|Bx\| \leq \|[\cdot, \cdot]\| \|x\|$, $x \in H_1$, also $B \in L_b(H_1, H_2)$ mit $\|B\| \leq \|[\cdot, \cdot]\|$. Gemäß unseren Definitionen gilt

$$(Bx, y) = \overline{(y, Bx)} = \overline{\Phi(Bx)(y)} = \overline{\Psi(x)(y)} = \overline{L_x(y)} = [x, y] \text{ für } x \in H_1, y \in H_2,$$

weshalb $[\cdot, \cdot] = (B\cdot, \cdot)_{H_2}$. Wegen $\|B\| \leq \|[\cdot, \cdot]\| = \|(B\cdot, \cdot)\| \leq \|B\|$ haben wir auch $\|B\| = \|[\cdot, \cdot]\|$. $\square$

10.2 Punktweise Holomorphie

Als erstes wollen wir für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ von der punktweisen Holomorphie einer Funktion $f : D \rightarrow L_b(X, Y)$ auf die Holomorphie derselben schließen. Die Holomorphie einer Funktion $h : D \rightarrow Z$ mit einem Banachraum Z über $\mathbb{C}$ ist dazu äquivalent, dass es zu jedem $w \in D$ Elemente $a_n \in Z$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, derart gibt, dass

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n a_n, \quad z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w),$$

wobei $\rho_w \in (0, +\infty]$ maximal mit der Eigenschaft ist, dass der Kreis $U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$ um w in D enthalten ist. Obige Gleichheit umfasst die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n a_n$ für alle $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$, also die Tatsache, dass der Konvergenzradius dieser Reihe $\geq \rho_w$ ist. Dabei gilt für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$ mit $\gamma(t) = w + \frac{\rho_w}{2} \exp(it)$

$$a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - w)^{n+1}} h(\zeta) d\zeta, \quad (27)$$

weshalb die $a_n \in Z$ eindeutig durch $h : D \rightarrow Z$ und $w \in D$ bestimmt sind.

10.3 Satz. *Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{C}$ sowie $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Eine Funktion $f : D \rightarrow L_b(X, Y)$ ist genau dann holomorph, wenn $D \ni z \mapsto f(z)x \in Y$ für alle $x \in X$ holomorph ist.*

Beweis. Ist $f : D \rightarrow L_b(X, Y)$ holomorph, so gibt es zu $w \in D$ Operatoren $A_n \in L_b(X, Y)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n A_n$ für $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$. Da für $x \in X$ die Abbildung $L_b(X, Y) \ni R \mapsto Rx \in Y$ linear und beschränkt ist, folgt

$$f(z)x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n A_n \right) x = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n (A_n x)$$

samt Konvergenz der rechten Seite, womit sich $D \ni z \mapsto f(z)x \in Y$ als holomorph herausstellt.

Sind umgekehrt die Funktionen $D \ni z \mapsto f(z)x \in Y$ für alle $x \in X$ holomorph, so gilt $f(z)x = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n(x)$, $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$, mit $a_n(x) \in Y$. Für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgt aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n(\alpha x + \beta y) &= f(z)(\alpha x + \beta y) = \alpha f(z)x + \beta f(z)y \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n(x) + \beta \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n (\alpha a_n(x) + \beta a_n(y)), \quad z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w), \end{aligned}$$

wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten in Abhängigkeit von der betreffenden holomorphen Funktion und vom Entwicklungspunkt w , dass $a_n(\alpha x + \beta y) = \alpha a_n(x) + \beta a_n(y)$, wodurch sich $a_n(\cdot) : X \rightarrow Y$ als linear herausstellt. Aus (27) angewendet auf $h = f(\cdot)x$ zusammen mit der Tatsache, dass die Norm eines Wegintegrals kleiner oder gleich der Länge des Weges mal Supremum der Norm des Integranden auf dem Weg ist, erhalten wir

$$\|a_n(x)\| \leq n! \left(\frac{\rho_w}{2}\right)^{-n} \sup_{|z-w|=\frac{\rho_w}{2}} \|f(z)x\| \leq n! \left(\frac{\rho_w}{2}\right)^{-n} \left(\sup_{|z-w|=\frac{\rho_w}{2}} \|f(z)\| \right) \|x\| \quad (\in [0, +\infty]).$$

Da $f(\cdot)x$ auf der kompakten Menge $K_{\frac{\rho_w}{2}}^{\mathbb{C}}$ stetig ist, haben wir $\sup_{|z-w|=\frac{\rho_w}{2}} \|f(z)x\| < +\infty$ für jedes $x \in X$. Gemäß dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gilt sogar $\sup_{|z-w|=\frac{\rho_w}{2}} \|f(z)\| < +\infty$, womit $\|a_n(x)\| \leq C\|x\|$ für ein $C > 0$ und allen $x \in X$. Also gilt $A_n := a_n(\cdot) \in L_b(X, Y)$. Da die Summandenfolge von einer konvergenten Reihe eine Nullfolge ist, gilt auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|(z-w)^n a_n(x)\| < +\infty,$$

weshalb wir wieder mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit auf $\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|(z-w)^n A_n\| < +\infty$ für alle $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$ schließen. Mit $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$ liegt für hinreichend kleines $\delta > 0$ auch $z_\delta := w + (1+\delta)(z-w)$ in $U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$, weshalb

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(z-w)^n A_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^n} \|(z_\delta-w)^n A_n\| < +\infty.$$

Folglich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n A_n$ für alle $z \in U_{\rho_w}^{\mathbb{C}}(w)$, wobei wegen $A_n x = a_n(x)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n A_n \right) x = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n a_n(x) = f(z)x \quad \text{für alle } x \in X,$$

und daher $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n A_n$. □

10.3 Identitätssatz

10.4 Satz (Identitätssatz). *Seien Y ein komplexer Banachraum, $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer sowie $f, g : G \rightarrow Y$ holomorph. Gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$, wobei $M \subseteq G$ eine Menge mit mindestens einem Häufungspunkt in jeder Zusammenhangskomponente von G ist, so folgt schon $f \equiv g$.*

Beweis. Zunächst sei G ein Gebiet. Die Menge

$$A = \{w \in G : f|_{U_{\delta}(w)} \equiv g|_{U_{\delta}(w)} \text{ für ein } \delta > 0 \text{ mit } U_{\delta}(w) \subseteq G\}$$

ist wegen $U_{\frac{\delta}{2}}(z) \subseteq U_{\delta}(w)$ für jedes $z \in U_{\frac{\delta}{2}}(w)$ offen. Insbesondere ist $\mathbb{C} \setminus A$ abgeschlossen und infolge $c(G \setminus A) \cap A \subseteq (\mathbb{C} \setminus A) \cap A = \emptyset$.

Es gilt auch $c(A) \cap G \setminus A = \emptyset$. Um das einzusehen, sei $w \in c(A) \cap G \setminus A$. Insbesondere ist w ein Häufungspunkt der Menge A . Für hinreichend kleines $\delta > 0$ und gewisse Koeffizienten $a_k, b_k \in Y$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - w)^k a_k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - w)^k b_k, \quad z \in U_{\delta}(w).$$

Mit dem Argument aus der Analysis eins/zwei bezüglich der Übereinstimmung zweier Potenzreihen (siehe Korollar 6.8.9 und Bemerkung 9.3.3) angewendet auf $E = (A \cap U_{\delta}(w)) - w$ folgt $f|_{U_{\delta}(w)} \equiv g|_{U_{\delta}(w)}$, was den Widerspruch $w \in A$ nach sich ziehen würde.

Also ist G Vereinigung der getrennten Mengen A und $G \setminus A$. Da G zusammenhängend ist, muss A oder $G \setminus A$ leer sein. Eine weitere Anwendung des Argumentes aus der Analysis eins/zwei (Korollar 6.8.9 und Bemerkung 9.3.3) angewendet auf $E = (M \cap U_{\delta}(w)) - w$ mit einem Häufungspunkt $w \in G$ der Menge $M \subseteq G$ und

hinreichend kleinem $\delta > 0$ zeigt $w \in A$, womit $G \setminus A = \emptyset$. Wir haben somit auf $A = G$ und infolge $f \equiv g$ geschlossen.

Im allgemeinen Fall eines offenen G kann man G als paarweise disjunkte Vereinigung von Gebieten schreiben, und die Behauptung folgt aus dem Fall für Gebiete. $\square$

10.4 Holomorphie in mehreren Variablen

10.5 Satz. Ist $D \subseteq \mathbb{C}^p$ offen, Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion, so sind folgende Aussagen⁸ äquivalent, wobei für $w \in \mathbb{C}^p$ und $j \in \{1, \dots, p\}$ die stetige Abbildung $\iota_j^w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^p$ durch $\iota_j^w(z) = w + (z - w_j)e_j$ mit dem j -ten kanonischen Basisvektor im $\mathbb{C}^p$ definiert ist.

- (i) f ist lokal beschränkt und für jedes $w \in D$ und $j \in \{1, \dots, p\}$ ist $f \circ \iota_j^w : (\iota_j^w)^{-1}(D) \rightarrow Y$ holomorph als Funktion in einer Variablen.
- (ii) f ist stetig und für jedes $w \in D$ und $j \in \{1, \dots, p\}$ ist $f \circ \iota_j^w : (\iota_j^w)^{-1}(D) \rightarrow Y$ holomorph als Funktion in einer Variablen.
- (iii) f ist als Abbildung von $D \subseteq \mathbb{C}^p \cong \mathbb{R}^{2p}$ nach Y stetig differenzierbar derart, dass $df(z) : \mathbb{C}^p \rightarrow Y$ für jedes $z \in D$ auch $\mathbb{C}$ -linear ist.
- (iv) Zu jedem $w \in D$ gibt es ein $r \in (0, +\infty)^p$ derart, dass $U_r^{\mathbb{C}^p}(w) \subseteq D$ und dass f auf $U_r^{\mathbb{C}^p}(w)$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, also

$$f(z + w) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p} z^\alpha a_\alpha, \quad z \in U_r^{\mathbb{C}^p}(0), \quad (28)$$

mit $a_\alpha \in Y$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p$, und unbedingt konvergentem (28).

Gelten diese Aussagen, so trifft (iv) für alle $w \in D$ und $r \in (0, +\infty)^p$ mit $U_r^{\mathbb{C}^p}(w) \subseteq D$ zu. Zudem gilt für die Koeffizienten in (28)

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma_{e,1}} \dots \int_{\gamma_{e,p}} \frac{f(w + (\zeta_1, \dots, \zeta_p)^T)}{(\zeta_1, \dots, \zeta_p)^{\alpha+1}} d\zeta_p \dots d\zeta_1 \quad (29)$$

⁸In der Tat sind diese Aussagen auch äquivalent zu der Aussage, dass es zu jedem $w \in D$ ein $r \in (0, +\infty)^p$ mit $U_r^{\mathbb{C}^p}(w) \subseteq D$ und mit für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$ holomorphem $U_{r_k}^{\mathbb{C}}(0) \ni \zeta \mapsto f(w + \zeta e_k) \in Y$ gibt. Das ist der Satz von Hartogs.

unabhängig von $\varrho \in (0, +\infty)^p$ mit $\varrho < r$, wobei $\gamma_{\varrho,k} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{\varrho,k}(\tau) = \varrho_k \exp(i\tau)$ für $k = 1, \dots, p$.

10.6 Satz (Identitätssatz für mehrere Variablen). Sind $D, G \subseteq \mathbb{C}^p$ offen mit $D \subseteq G$ und nichtleer sowie $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$, so folgt schon $f \equiv g$.

Index

- C_h , 8
- $H(\Omega)$, 34
- $H(\Omega, \mathbb{C})$, 34
- $H_b(\Omega, \mathbb{C})$, 34
- M , 5
- M_h , 6
- antiholomorph, 36
- Bergmannraum, 39
- Dirichletraum, 7
- Gram-Operator, 56
- Hardyraum, 5
- Hilbertraum
 - kernreproduzierender, 3
- Hilbertraum-Tensorprodukt, 26
- Kernfunktion, 9
- kernreproduzierender Hilbertraum, 3
 - L -wertiger, 52
 - d -vektorwertiger, 52
- Kompositionsoperator, 8
- Lax-Milgram, 56
- Multiplikationsoperator, 5, 6
- Norm
 - Sesquilinearform, 55
- Orthonormalbasis, 10
- Reproducing Kernel Hilbert Space, 3
- RKHS, 3
- Satz
 - Identitätssatz, 59
 - Identitätssatz für mehrere Variable,
61
 - von Hartogs, 60
- Sesquilinearform
 - beschränkte, 55
 - positiv semidefinite, 10
- Tensorprodukt
 - Hilberträume, 26