

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird die dynamische Analyse von Systemen mit veränderlichen elastischen Eigenschaften während eines Schwingungsvorgangs untersucht. Das einfachste Modell für solche Systeme ist ein bilinearer elastischer Einmassenschwinger, der unterschiedliche Federsteifigkeiten bei Dehnung und Stauchung aufweist. Eine exakte Lösung lässt sich schrittweise herleiten, indem man auf lineare Lösungen eines Einmassenschwingers zurückgreift und die Kontinuität der Verschiebungen und Geschwindigkeiten unter bestimmten Übergangsbedingungen gewährleistet.

Diese Studie konzentriert sich insbesondere auf die mechanische Modellierung und numerische Analyse von ebenen, drehungsfreien, ursprünglich geraden, homogenen, schubstarrten Bernoulli-Euler Balken mit klassischen Randbedingungen unter unterschiedlichen Anregungen. Die Balken bestehen aus einem Material mit unterschiedlichem Elastizitätsmodul im Zug- und Druckbereich, einem sogenannten bimodularen Material. Folglich wird die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Kurve durch zwei lineare Segmente mit einer Unstetigkeit der Steigung im Ursprung angenähert. Diese Eigenschaft impliziert, dass die neutrale Achse nicht durch den geometrischen Mittelpunkt eines Querschnitts verläuft und vom Vorzeichen der Krümmung abhängt. Die Ermittlung der Bewegungsgleichung für Biegeschwingungen erfolgt durch die Modellbildung eines effektiven zweischichtigen Balkens mit einer diskontinuierlichen neutralen Achse. Jede der beiden krümmungsabhängigen Biegekonfigurationen ist durch die Lage der neutralen Achse eindeutig charakterisiert, die nicht nur von den elastischen Materialeigenschaften, sondern auch von der Querschnittsform beeinflusst wird. In dieser Arbeit werden verschiedene Querschnitte untersucht, um hauptsächlich ihren Einfluss auf die Position der neutralen Achse, auf die Steifigkeiten sowie folglich auf die dynamische Antwort von bimodularen Balken zu zeigen. Je nach Querschnittsform kann das dynamische Verhalten eines bimodularen Trägers linear oder nichtlinear sein. Ein lineares dynamisches Verhalten zeigen bimodulare Träger mit symmetrischen Querschnitten bezüglich der η -Biegeachse, die durch den geometrischen Mittelpunkt verläuft. Im Gegensatz dazu weisen Träger mit unsymmetrischen Querschnitten eine Nichtlinearität auf, die sich aus den Unterschieden in der effektiven Biegesteifigkeit zwischen zwei Biegekonfigurationen ergibt. Im Falle des nichtlinearen Verhaltens kann keine exakte geschlossene Lösung für die gesamte betrachtete Zeit abgeleitet und durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden. Aus diesem Grund wird die isogeometrische Analyse angewandt, um eine Näherungslösung nicht nur für lineare, sondern insbesondere für nichtlineare Schwingungen eines bimodularen Balkens zu finden.

In einer numerischen Untersuchung liegt besonderes Augenmerk auf der Anwendung der isogeometrischen Finite-Elemente-Diskretisierung mit B-Splines für die dynamische Analyse von unimodularen und bimodularen Trägern mit jeweils drei verschiedenen Querschnitten. Die Querschnittsabmessungen werden so gewählt, dass ein annähernd gleiches Trägheitsmoment bezüglich der η -Biegeachse und gleiche Querschnittsflächen vorhanden sind, was zu gleichen Massen pro Längeneinheit führt. Im Rahmen dieser Studie werden drei verschiedenen Erregungen betrachtet. Eine davon ist die periodische Anregung, bei der die Antworten der Balken im Zeit- und Frequenzbereich analysiert werden. Während die modifizierte Newmark-Methode zur Analyse im Zeitbereich verwendet wird, dient das Verfahren der Harmonischen Balance speziell zur Untersuchung im Frequenzbereich, wobei der Fokus auf nichtlinearen bimodularen Balken liegt. In diesem Fall approximiert eine Fourier-Reihe die Lösung eines nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems, welches durch zusätzliche asymmetrische innere

Kräfte aufgrund von Variationen der effektiven Biegesteifigkeit entsteht. Durch die Approximation der stationären Lösung verringert sich mit dem Verfahren der Harmonischen Balance der Rechenaufwand für potenziell lange Einschwingvorgänge und es wird in der Regel eine akzeptable Genauigkeit bei der Verwendung von nur wenigen Reihengliedern erreicht. Ein Vergleich der Antworten zeigt den signifikanten Einfluss von bimodularen Materialien, insbesondere von den Querschnittseigenschaften.

Abstract

This thesis investigates the dynamic response of systems exhibiting varying elastic properties during a vibrational process. The simplest model for such systems is a bilinear elastic oscillator characterized by different spring stiffness in the tensile and compressive domains. An exact solution can be derived piecewise by utilizing linear solutions of a single-degree-of-freedom system and ensuring continuity of displacement and velocity under specified conditions at transition times.

However, this study particularly focuses on the mechanical modeling and numerical analysis of the dynamic response of planar, rotation-free, initially straight, homogeneous Bernoulli-Euler beams rigid in shear. This study analyzes beams with classical boundary conditions under time-varying excitation. However, the beams are made from material with different elastic Young's modulus in tension and compression, known as bimodular material. Consequently, the nonlinear stress-strain curve is approximated by two linear segments with a discontinuity in slope at the origin. This characteristic implies that the neutral axis does not pass through the geometric centroid of a cross-section and, indeed, depends on a curvature's sign. Thus, formulating the equation governing flexural oscillations involves defining a model with two-layer laminates and a discontinuous neutral beam axis. Each of the two bending configurations is uniquely characterized by its neutral axis position, influenced not only by the elastic material properties but also by the shape of the cross-section. In this thesis, various cross-sections are considered in order to demonstrate their influence primarily on the position of the neutral axis, on stiffnesses and, consequently, on the dynamic response of bimodular beams. The dynamic response of a bimodular beam can vary from linear to nonlinear, depending on the specific cross-sectional shape. Bimodular beams with symmetric cross-sections relative to the η -bending axis, passing through the geometric centroid, demonstrate a linear dynamic response. Conversely, bimodular beams with nonsymmetric cross-sections exhibit nonlinearity due to variations in effective bending stiffness during upward and downward bending motions. In the case of the nonlinear behavior of the bimodular beam, an exact closed-form solution cannot be derived for the entire considered motion domain expressed by a single equation. For this reason, isogeometric analysis is applied to provide an approximated solution, not just for linear but particularly for nonlinear vibration of a bimodular beam.

In a numerical investigation, special attention is directed towards employing isogeometric finite element discretization with B-splines for the dynamic analysis of both unimodular and bimodular beams, each with three different cross-sections. However, in order to illustrate the effect of cross-sectional shape on dynamic response, their dimensions are carefully chosen to ensure approximately equal moment of inertia with respect to the η -bending axis and equal cross-sectional areas, resulting in equal mass per unit length. Within this study, three different types of excitations are applied to the beams. One of these includes periodic excitation, whereby the responses of the beams are evaluated across time and frequency domains. While the modified Newmark method is utilized to analyze the responses in the time domain, the harmonic balance method is specifically applied to investigate the frequency-response function to periodic excitation, emphasizing nonlinear bimodular beams. In this case, the truncated Fourier series approximates the solution of a nonlinear ordinary differential equation system, which arises from additional asymmetric internal forces due to variations in effective bending stiffness between upward and downward bending motion. By approximating the steady-state solution, the harmonic balance

method reduces the computational cost of potentially long transient responses and commonly achieves acceptable accuracy even with a low truncation order. A comparison of responses shows the significant influence of bimodular materials, particularly with regard to the properties of the cross-section.