Übungen zu Analysis 2, 8. Übung

1. Man wende das zweite Beispiel der vorherigen Übung auf $f(x) = \ln(x+1)$ an, und zeige, dass das uneigentliche Integral
$$a := -\int_0^\infty \phi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x + 1$$
existiert und dass
$$a = \lim_{n\to\infty}\Big(\ln((n+1)!) - (n+\frac{3}{2})\ln(n+1) + n + 1\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln n + n\Big).$$

2. Seien $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $A_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in Matrixdarstellung gegeben durch
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
wobei die Ausgangsräume der Abbildungen mit $\|.\|_\infty$ und die Zielräume mit $\|.\|_1$ versehen sind. Berechnen Sie die Abbildungsnormen von A_1, A_2, A_3.

3. Sei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix im $\mathbb{R}^{n\times n}$. Berechnen Sie $\|D\|_2, \|D\|_\infty$, wenn man D als Element von $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet. Weiters berechne man die Abbildungsnorm von D als Element von $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathbb{R}^n$ vorne und hinten mit der $\|.\|_2$-Norm versieht.

4. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel berechne man die Abbildungsnorm von D als Element von $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathbb{R}^n$ vorne und hinten mit der $\|.\|_\infty$-Norm versieht.

5. Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit $\|.\|_\infty$. Man betrachte $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ den Raum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, also den Dualraum von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|$. Bekanntlich ist $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$, indem man ein $A \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in Matrixform $(a_1, \dots, a_n)$ angibt. Man zeige, dass dabei $\|.\|$ mit der $\|.\|_1$-Norm übereinstimmt.

6. Seien E eine Teilmenge eines metrischen Raumes $\langle X, d_X\rangle$ und $(Y, \|.\|_Y)$ ein Banachraum. Man zeige mit Hilfe von Übungsaufgabe 7 der Übung 12 aus Analysis eins und dem Limesvertauschungslemma, dass die Menge aller gleichmäßig stetigen Funktionen $f : E \to Y$ versehen mit $\|.\|_\infty$ einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{B}(E, Y)$ und damit einen Banachraum bildet.

7. Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume und $(L_b(X, Y), \|.\|)$ der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y versehen mit der Abbildungsnorm. Zeigen Sie, dass für ein festes $x \in X$ die Abbildung $A \mapsto Ax$ von $L_b(X, Y)$ nach Y beschränkt und linear ist.

   Ist weiters E eine nichtleere Menge und $t \in E$, so zeige man auch, dass die Abbildung
$$\mathcal{B}(E, Y) \to Y, \quad f \mapsto f(t),$$
   beschränkt und linear ist. Bestimmen Sie die Abbildungsnorm dieser Abbildung!

8. Man betrachte den normierten Raum $(\mathbb{R}^{p\times p}, \|.\|_\infty)$, und zeige, dass die Funktion $\mathbb{R}^{p\times p} \ni A \mapsto \operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \in \mathbb{R}$ beschränkt und linear sowie $A \mapsto \det(A)$ stetig auf $\mathbb{R}^{p\times p}$ ist.

   Weiters sei $y \in \mathbb{R}^p$ fest und man betrachte die Funktion von der Menge $GL(p, \mathbb{R})$ aller invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{R}^{p\times p}$ nach $\mathbb{R}^p$, die jedem $A \in GL(p, \mathbb{R})$ die Lösung x der Gleichung $Ax = y$ zuweist. Man zeige mit Hilfe der Cramerschen Regel, dass diese Funktion auch stetig ist.

9. Sei $F : [1, 2] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 5 \\ \sin t + \frac{t^2}{t+1} \\ t\exp(3t) \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\int_1^2 F(t)\,\mathrm{d}t$ und F'.