

Übungen zu Analysis 2, 7. Übung

1. Man zeige mit Hilfe des letzten Beispiels der vorherigen Übung, dass der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

existiert.

Anmerkung: Durch die Existenz dieses Grenzwertes lässt sich angeben, wie schnell die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gegen $+\infty$ konvergiert, nämlich genauso schnell wie $\ln n$ es für $n \rightarrow \infty$ tut. Die Zahl γ wird Euler-Mascheronische Konstante genannt; ihr ungefähre Wert ist 0,577215....

2. Sei $f(x)$ auf $[0, n]$ zweimal stetig differenzierbar. Man zeige, dass

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx = \frac{f(n) - f(0)}{2} - \int_0^n \phi(x) f''(x) dx,$$

$$\text{wobei } \phi(x) = \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor)}{2}.$$

3. Man berechne (Begründungen!)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{1 + a \sin^2(x)} dx.$$

4. Man berechne (Begründungen!)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_0^R \dots = \int_0^R \lim_{x \rightarrow 0+} \dots$ für jedes feste reelle $R \geq 0$. Dann definiere man $H : [0, +\infty) \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(R, x) := \int_0^R \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$, wobei $[0, +\infty)$ durch $\leq$ und $(0, 1]$ durch $\geq$ gerichtet sind. Man weise nach, dass sich das Limesvertauschungslemma anwenden lässt.

5. Für $x \in (0, +\infty)$ zeige man, dass das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

absolut konvergiert. Weiters zeige man, dass $\Gamma(x)$ stetig von x abhängt.

Hinweis: Sei $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ fest. Man zeige, dass $f_n(x) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} dt$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a, b]$ ist, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\Gamma(x)$ konvergiert. Dazu zeige man, dass $|e^{-t} t^{x-1}| \leq c t^{a-1}$, $t \in (0, 1]$, und $|e^{-t} t^{x-1}| \leq d \frac{1}{t^2}$, $t \in [1, +\infty)$, mit irgendwelchen Konstanten c, d .

Allgemeiner Tipp, wie man $f(t) \leq Cg(t)$ mit irgendeinem $C > 0$ für reellwertige, nicht negative und stetige Funktionen f, g auf einem Intervall $[a, b]$ mit $g(t) \neq 0$ herleitet:

Gilt $\lim_{t \rightarrow b-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, so gibt es insbesondere zu $\epsilon = 1$ ein $t_0 \in [a, b]$ mit $t \geq t_0 \Rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \leq 1$. Da die Funktion $\frac{f(t)}{g(t)}$ auf dem kompakten Intervall $[a, t_0]$ stetig ist, ist sie dort beschränkt, also $\frac{f(t)}{g(t)} \leq C$ für ein $C > 0$, welches ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch $C \geq 1$ erfüllt. Somit gilt $\frac{f(t)}{g(t)} \leq C$ auf ganz $[a, b]$.

6. Durch Betrachtung der Ableitung leite man die Taylorreihe zur Funktion $\arctan$ mit Anschlussstelle $y = 0$ her. Konvergiert diese Reihe gegen $\arctan$?

Anmerkung: Zusammen mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Zeigen Sie, dass 'äquivalent zu sein' eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf einem gegebenen Vektorraum X abgibt.

Verifizieren Sie auch für äquivalente Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X , dass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ dieselben offenen, abgeschlossenen, kompakten Teilmengen sowie dieselben Cauchy-, konvergenten Folgen (mit übereinstimmendem Grenzwert) haben und dass sie gleichzeitig Banachräume abgeben bzw. keine Banachräume abgeben.

Hinweis: Siehe Beispiel 2 der achten Übungen und Beispiel 1 der neunten Übung aus Analysis eins.

8. Seien X und Y Vektorräume über demselben Körper, $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ äquivalente Normen auf X und $\|\cdot\|_Y$ und $\|\cdot\|_Y$ äquivalente Normen auf Y . Zeigen Sie, dass dann $L_b((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)) = L_b((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$ als Vektorräume und dass auch die Abbildungsnormen auf $L_b((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$ und auf $L_b((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$ äquivalent sind.

9. Mit der Notation aus dem Beweis vom Satz, dass $L_b(X, Y)$ ein Banachraum ist, wenn Y ein Banachraum ist, zeige man, dass für $f \in \mathcal{L}$ die durch $A(0) = 0$ und $A(x) := \|x\| \cdot f(\frac{1}{\|x\|}x)$ für $x \neq 0$ definierte Abbildung $A : X \rightarrow Y$ tatsächlich linear und beschränkt ist mit $A|_E = f$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ für $\lambda \in [0, +\infty)$.