Übungen zu Analysis 2, 6. Übung

1. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ berechnen Sie
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mathrm{i}nt) \cdot \exp(-\mathrm{i}mt)\,\mathrm{d}t\,,$$
sowie
$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin(mt)\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt)\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \cos(mt)\,\mathrm{d}t\,.$$
Hinweis: Unterscheiden Sie dabei den Fall $m = n$ und $m \neq n$. Um Rechenarbeit zu sparen, kann man die letzten drei Integrale auf das erste zurück führen.

2. Welche folgender Integrale sind eigentliche bzw. uneigentliche Riemann-Integrale, wobei $r > 0$? Weiters berechne man diese.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x - 4x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{2 + x + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}\,\mathrm{d}x\,.$$
Hinweis zum letzten Integral: Substituieren Sie zuerst derart, dass $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 = t^2 + 1$.

3. Man berechne das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} (t^2 + 2t) \exp(wt) \sin t\,\mathrm{d}t$ mit $w \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, w < 0$.

4. Man berechne
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^6 + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 x^m (\log x)^n\,\mathrm{d}x, \ n, m \in \mathbb{N}\,.$$

5. Sei $\mathcal{Q}[a, b]$ die Menge aller stückweise stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$. Weiters sei $\mathcal{N}$ die Menge aller $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(t) \neq 0$ für nur endlich viele t.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{Q}[a, b]$ versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{N}$ ein Unterraum davon ist. Weiters zeige man, dass $(c, f + \mathcal{N}) \mapsto F$, wobei $F(x) = c + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine wohldefinierte, lineare und bijektive Abbildung von $\mathbb{R} \times (\mathcal{Q}[a, b]/_{\mathcal{N}})$ auf
$$\{F \in C[a, b] : F \text{ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar auf } [a, b]\}\,.$$
   Für die Definition von stückweise stetig differenzierbar siehe Definition 11.1.9. Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktion von $(c, f + \mathcal{N}) \mapsto F$!

6. Geben Sie eine Riemann-integrierbare aber nicht stückweise stetige Funktion f an und führen Sie aus, warum f diese Eigenschaft hat!

   Hinweis: Betrachten Sie etwa $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$, $f(t) = \frac{1}{2}$ auf $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $f(t) = \frac{1}{4}$ auf $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, usw. . Bauen Sie zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ derart, dass die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner als ϵ wird.

7. Für $\alpha \geq 0$ sei $I_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^\alpha \, \mathrm{d}x\,.$$

Man finde durch partielle Integration eine Beziehung zwischen I_α und $I_{\alpha+2}$. Man zeige mit Hilfe der damit erhaltenen Rekursionsformel, dass für $k \in \mathbb{N}$ folgende zwei Formeln gelten:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\,,$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\,.$$

8. Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $k \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x\,.$$

Daraus und aus dem vorherigen Beispiel leite man folgende Ungleichungen her:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k) \cdot 2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}\,.$$

Nun forme man diese Ungleichung so um, dass in der Mitte nur noch $\frac{\pi}{2}$ steht, und man leite daraus die Wallissche Produktformel her:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \to \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k}\,.$$

9. Sei $f(x)$ auf $[0, n]$ stetig differenzierbar. Man zeige durch eine Zerlegung von $\int_0^n$ in $\sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j$ unter Verwendung der partiellen Integration, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^n f(k)$ und $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen lässt durch

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Außerdem zeige man:

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_0^n (x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}) f'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$