Übungen zu Analysis 2, 5. Übung

1. Zeigen Sie, dass in der Definition von $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ als $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ für ein $f : (a,b) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ mit auf jedem kompakten Teilintervall Riemann-intgrierbaren f unabhängig vom gewählten $c \in (a,b)$ ist.

   Weiters führe man genau aus, dass für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ denselben Konvergenzradius haben.

2. Man berechne folgende Integrale:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x+1}{x^4 - x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Man berechne durch geeignete Substitutionen folgende Integrale:

$$\int_{-4}^{1} 5\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{1}^{5} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Man berechne

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x + \tan x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Sind folgende uneigentliche Integrale absolut konvergent oder nicht?

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

   Hinweis zur Divergenz: Wenn ein uneigentliches Integral $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ divergiert, und wenn $|g(x)| \geq |f(x)|$, dann divergiert auch $\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$ (Divergente Minorante).

6. Man berechne mit Hilfe eines Riemann-Integrals den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius $r > 0$.

   Weiters berechne den Flächeninhalt folgender Teilmenge der Ebene:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq x^2\}\,.$$

7. Für welche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existieren die (uneigentlichen) Integrale:

$$\int_{0}^{1} x^\alpha\,\mathrm{d}x, \quad \int_{1}^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x\,.$$

   Im Falle der Existenz berechne man diese!

8. Man berechne (falls konvergent)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - 2t + 2)\exp(-|t| \cdot (2 + \mathrm{i}\pi))\,\mathrm{d}t\,.$$

9. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n(x)$ auf $[0, 1]$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + 2n^2\,, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2n}\,, \\ \frac{n}{n+1}\,, & \text{falls } x \in \{0\} \cup [\frac{1}{2n}, 1]\,. \end{cases}$$

Warum sind die Funktionen f_n Riemann-integrierbar? Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen punktweise? Wenn ja, berechnen Sie die Grenzfunktion f! Gilt dabei $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$?
Was lässt sich daraus für die gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ableiten?