Übungen zu Analysis 2, 4. Übung

1. Man bestimme für $\alpha, a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ die Stammfunktion von x^α als Funktion auf $(0, \infty)$ und von a^x als Funktion auf $\mathbb{R}$.

2. Sei f eine reellwertige stetige Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und die im Inneren von I ableitbar ist. Man beweise, dass f genau dann konvex ist, wenn ihre Ableitung f' monoton wachsend ist.

   Wenn für f noch zusätzlich die zweite Ableitung im Inneren von I existiert, wie lässt sich dann die Konvexität durch f'' charakterisieren?

   Hinweis: Man verwende für $\Rightarrow$ die letzte Charakterisierung in der vorletzten Übungsaufgabe der dritten Übung. Für die andere Richtung verwende man den Mittelwertsatz.

3. Man beweise, dass die Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex sind. Weiters zeige man, dass $\ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ konkav ist.

4. Sei f eine konvexe Funktion auf einem Intervall I. Man beweise mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die sogenannte Jensensche Ungleichung in den beiden Ausformungen (i) und (ii):

   (i) Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ gilt
   $$f(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) \;\leq\; \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)\,.$$

   (ii) Für $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0, +\infty)$, wobei nicht alle Null sein dürfen, gilt
   $$f\left(\frac{\sum_{j=1}^n \mu_j x_j}{\sum_{j=1}^n \mu_j}\right) \;\leq\; \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^n \mu_j}\,.$$

   Man zeige damit auch, dass für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ gilt
   $$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n\,.$$

   Hinweis: $f(x) = \mathrm{e}^x$!

5. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^3 + 1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Wählen Sie $n + 1$ äquidistante Stützstellen, und berechnen Sie zur entsprechenden Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von $[0, 1]$ die Ober- und die Untersummen, sowie $\lim_{n\to\infty} O(\mathcal{Z}_n)$, $\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{Z}_n)$.

   Hinweis: $4\sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n + 1)^2$.

6. Berechnen Sie das Integral aus dem vorherigen Beispiel mit Hilfe von Riemann-Summen mit $n + 1$ äquidistanten Stützstellen, und Zwischenstellen an den Intervallmittelpunkten.

7. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zeigen Sie, dass dass für ein Netz $(f(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ mit Werten in einem metrischen Raum folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} f(\mathcal{R}) = y, \text{ also } \forall\epsilon > 0\ \exists\mathcal{R}_0 \in \mathfrak{R} : \forall\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_0 \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\,.$$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall|\mathcal{R}| < \delta \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\,.$$

$$\forall(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(\mathcal{R}_n) = y\,.$$

8. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Weiters bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zu jedem $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$ sei $F(\mathcal{R})$ die Funktion auf $[a, b]$ definiert durch

$$F(\mathcal{R})(x) = f(\alpha_j)\,,$$

wenn $x \in [\xi_{j-1}, \xi_j)$, und $F(\mathcal{R})(b) = f(\alpha_{n(\mathcal{R})})$.

Man zeige, dass dann $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} F(\mathcal{R}) = f$ und zwar in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{C})$ bezüglich der Metrik d_∞, also gleichmäßig.

9. Man berechne folgende Integrale:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x\,.$$