Übungen zu Analysis 3, 5. Übung

1. Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist.

   Hinweis: Wie hängen $f'(z) \in \mathbb{C}$ und $df(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zusammen?

2. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der vierten Übung gebe man irgendeine Einbettung nach $O(2)$ hinein an, die $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ihrem Bild hat. Schließlich gebe an, ob $O(2)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ ist.

   Hinweis: Für das zweite Problem betrachten sie $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$. Welche Werte kann det auf $O(2)$ annehmen?

3. Für $0 < d < p$ und ein offenes $C \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f : C \to \mathbb{R}^{p-d}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Graph $M := \{(x^T, f(x)^T)^T \in \mathbb{R}^p : x \in C\}$ von f als Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ eine implizit definierte Mannigfaltigkeit ist. Geben Sie die Dimension dieser Mannigfaltigkeit und die definierende Implizite Funktion samt offenem Definitionsbereich an.

4. Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn $M \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{p+n}$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass wenn N eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist, es zu jedem $x \in N$ eine Karte φ der Menge M gibt, die auch eine Karte der Menge N ist.

6. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ und $x \in M$. Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Kurve $\alpha : [-1, +1] \to \mathbb{R}^p$ mit $\alpha([-1, +1]) \subseteq M$ und $\alpha(0) = x$ der Tangentialvektor $\alpha'(0)$ im Tangentialraum T_x von M an der Stelle x liegt.

   Kann man jeden Vektor aus T_x als $\alpha'(0)$ für eine gewisse derartige Abbildung schreiben? Wenn ja warum?

7. Sei $f(x, y)^T = \sqrt{y - x}$ definiert auf $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ und setze

   $$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}\,.$$

   Bestimmen Sie den Tangentialraum und die beiden Normalvektoren, also die beiden Vektoren der länge eins, welche orthogonal auf den Tangentialraum stehen, an den Punkten $(x, y, z)^T = (2, 6, f(2, 6)^T)^T$, $(x, y, z)^T = (-2, 0, f(-2, 0)^T)^T$ sowie $(x, y, z)^T = (-\frac{1}{2}, 1, f(-\frac{1}{2}, 1)^T)^T$ aus M. Fertigen Sie auch eine Skizze an!

8. Für $d \leq p$ und ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $T : O \to \mathbb{R}^p$ eine injektive und stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $dT(x)$ immer vollen Rang hat. Man zeige für ein offenes $\emptyset \neq G \subseteq O$ mit $\overline{G} \subseteq O$, dass $M := T(G)$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass $T : \overline{G} \to T(\overline{G})$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung: Das Bild $T(O)$ ist im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. Man denke dazu man an das Aussehen der Ziffer 6 als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Diese kann als Bild eines offenen Intervalls (a, b) unter einer Abbildung T wie oben geschrieben werden.

9. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $B : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $B'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Man zeige, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, für die $M := \{z \in D : \operatorname{Re} B(z) = c\}$ nichtleer ist, M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ abgibt.