# Übungen zu Analysis 3, 13. Übung

1. Man berechne die Fourierreihe von $f(x) = \frac{1}{2-\exp(\mathrm{i}x)}$, $x \in [-\pi,\pi]$, bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(\mathrm{i}nx)$ von $L^2([-\pi,\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$. Konvergiert diese punktweise oder gar gleichmäßig und wogegen?

   Hinweis: Stellen Sie zuerst $f$ als geometrische Reihe dar!

2. Betrachten Sie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = \pi - x$ für $x \in (0,\pi]$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt wird, und berechnen Sie die Fourierreihe bezüglich der Orthonormalbasis $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ aus der zwölften Übung.

   Wohin gegen konvergiert diese Reihe punktweise? Berechnen Sie schließlich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$!

3. Die Einschränkung der Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ aus Übungsaufgabe 6 der zwölften Übung auf $[-\pi,+\pi)$ setze man $2\pi$-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. Geben Sie an, wogegen die Fourierreihe dieser Funktion punktweise, also für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}$, konvergiert! Vergessen Sie nicht die Punkte $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$!

   Gehen Sie genauso mit der durch $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (1 - x^2)$ definierten Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ vor.

4. Man entwickle $x \mapsto x \sin \pi x$, $x \in [-1,1]$ in eine Fourierreihe der Form
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(\mathrm{i}n\pi x)$$
   bzw.
$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x) \ .$$
   Geben Sie an, wohin die Fourierreihe punktweise konvergiert!

5. Sei $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(\zeta)$. Weiters bestimme man $\widehat{[|t|\mathrm{e}^{-|t|}]}(\zeta)$ sowie $\widehat{[t\mathrm{e}^{-|t|}]}(\zeta)$.

6. Man berechne für $a > 0$ die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ und von $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Geben Sie auch an, ob dabei $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ und/oder $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

7. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ und bestimme damit die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x) \cdot \mathrm{e}^{-|x|}$.

8. Man bestimme die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sowie von $\frac{4}{3+2x+x^2}$.
   Hinweis: Fakta 17.1.4 könnte hilfreich sein für die zweite Funktion.

9. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig und derart, dass $f|_{\mathbb{R}\setminus M}$ stetig differenzierbar ist, wobei $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist. Sei $g := f'$ auf $\mathbb{R} \setminus M$ und sei $g$ irgendwie auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Wir nehmen an, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$.

   Zeigen Sie, dass dann $\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$ und $\hat{g}(\zeta) = \mathrm{i}\zeta\hat{f}(\zeta)$.

   Mit Hilfe dieser Tatsache bestimme man schließlich, welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus $L^1(\mathbb{R})$ als Fouriertransformierte die Funktion $\frac{4y}{3+2y+y^2}$ hat.