Übungen zu Analysis 3, 10. Übung

1. Sei M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und $t(y)$ eine stetige und normierte Tangente von M, also $t : M \to \mathbb{R}^p$ stetig mit $\|t(y)\|_2 = 1$ und $t(y) \in T_y$ für alle $y \in M$, wobei T_y der Tangentialraum von M im Punkt y ist.

   Ist $\phi : (a, b) \to M$ eine Einbettung, so zeige man, dass $\phi'(t) = \pm\|\phi'(t)\|t(\phi(t))$, wobei das Vorzeichen $\pm$ für alle $t \in (a, b)$ dasselbe ist.

   Angenommen, dieses Vorzeichen ist $+$, und angenommen, ϕ sowie ϕ' lassen sich stetig auf $[a, b]$ fortsetzen, so zeige man, dass für jedes stetige Vektorfeld $F : O \to \mathbb{R}^{1\times p} \simeq L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mit $O \supseteq \phi([a, b])$ das Wegintegral

   $$\int_\phi F(x)\,\mathrm{d}x$$

   aus dem zweiten Semester mit dem Oberflächenintegral

   $$\int_{\phi(a,b)} F(y)\,t(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

   übereinstimmt.

   Schließlich zeige man, dass im Falle $p = 2$ und $M = \partial^o G$ die Funktion $t(y) = Jv(y)$ eine Funktion mit den Eingangs erwähnten Eigenschaften ist. Dabei ist $v(y)$ die äußere Normale und

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt, und seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$, geschlossene, stetige, stückweise stetig differenzierbare Wege derart, dass die Abbildungen $\gamma_j|_{(a_j,b_j)\setminus M_j}$ (M_j sind die Unstetigkeitsstellen von γ_j') Einbettungen in den orientierbaren Rand $\partial^o D$ mit paarweise disjunkten $\gamma_j\big((a_j, b_j) \setminus M_j\big)$ sind und dass

   $$\partial^o D \setminus \bigcup_{j=1,\dots,m} \gamma_j\big((a_j, b_j) \setminus M_j\big) \quad \text{sowie} \quad \partial D \setminus \partial^o D$$

   endliche Mengen sind – man denke an einen Kreis, einen Kreis mit Loch, ein Dreieck oder ein Rechteck. Skizze!

   Zeigen Sie, dass für $t \in (a_j, b_j) \setminus M_j$, $j = 1, \dots, m$, die komplexe Zahl $-\mathrm{i}\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor normal auf den Tangentialraum $T_{\gamma_j(t)}$ für $\partial^o D$ steht.

   Zeigen Sie weiters, dass unter der Annahme, dass $-\mathrm{i}\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor immer ins äußere von D zeigt, also ein positives Vielfache der äußeren Normalen $v(y)$ mit $y = \gamma_j(t)$ ist, für ein stetig differenzierbares $f : G \to \mathbb{C}$ mit $G \supseteq \overline{D}$ das komplexe Wegintegral

   $$-\mathrm{i}\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

interpretiert als Zweivektor mit

$$\int_{\partial^o D} \phi_f(y) v(y) \,\mathrm{d}\mu(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist μ das Oberflächenmaß von $\partial^o D$ und

$$\phi_f(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) & -\operatorname{Im} f(z) \\ \operatorname{Im} f(z) & \operatorname{Re} f(z) \end{pmatrix} .$$

Schließlich zeige mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y})$, dass

$$\frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \,\mathrm{d}\lambda_2(z) .$$

Welche Aussage erhält man damit, wenn f holomorph ist?

3. Sei G die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit Länge kleiner r für ein festes $r > 0$. Man bestimme die äußere Normale $v((x,y)^T)$ durch einen Punkt $(x,y)^T \in \partial^o G$ und berechne das Flussintegral

$$\int_{\partial^o G} g((x,y)^T)\; v((x,y)^T) \,\mathrm{d}\mu((x,y)^T)$$

direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz. Dabei ist

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x^2)y\,, & (1-y^2)x \end{pmatrix} .$$

4. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1,\, -1 < x_3 < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ das Vektorfeld $F((x_1,x_2,x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$. Man gebe $\partial^o G$ an und zeige, dass

$$\int_{\partial^o G} F(y) v(y) \,\mathrm{d}\mu(x) = 4\pi .$$

Man berechne dieses Integral direkt und auch mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

5. Für $G = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 4,\, 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$ gebe man $\partial G, \partial^s G$ und $\partial^o G$ an und berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_{\partial^o G} v(a)^T f(a) \,\mathrm{d}\mu(a) ,$$

wobei $v(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist. Außerdem ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z)^T = (x+y, y+z, x+z^2)^T$.

6. Man betrachte folgende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M :\Leftrightarrow z > 0,\; 3x^2 - 4y + 2y^2 + 2z - 3 = 0 .$$

Weiters sei G jene offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die von M und der xy-Ebene begrenzt wird.

Man bestimme $\partial G, \partial^s G, \partial^o G$ und berechne für

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z^2+1) \\ 7z \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_M v(a)^T F(a)\, \mathrm{d}\mu(a)\,,$$

wobei $v(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist.

7. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Funktion

$$f((x,y,z)^T) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$

das Flussintegral $\int_{\partial^o G} v((x,y,z)^T)^T f((x,y,z)^T)\, \mathrm{d}\mu((x,y,z)^T)$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt und derart ist, dass sich $\partial^o G = \partial^s G$ aus den den Flächen

$$S_1: \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4\,, \quad z > 1,$$
$$S_2: \ (z+5)^2 = 9(x^2+y^2)\,, \quad z \in (-5,1),$$

zusammensetzt. Skizze!

8. Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 + 3x_2 \\ x_1^2 x_2 - 3x_3^3 \\ 7x_1 x_2 + x_2^2 x_3 + 15 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei M die Mannigfaltigkeit

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 = a,\ y_3 < -\frac{a}{2} \right\}.$$

Berechnen Sie das Flussintegral $\int_M v(y)^T f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$.