Übungen zu Analysis 3, 8. Übung

1. Sei Ω eine nichtleer Menge versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge) und dem Zählmaß μ, also $\mu(A) = n$, wenn A genau $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Elemente hat, und $\mu(A) = +\infty$ sonst.

   Zeigen Sie, dass dann für $f : \Omega \to [0, +\infty)$ das Integral $\int_\Omega f \, d\mu$ und die unbedingte Summe $\sum_{n\in\Omega} f(n)$ $(= \lim_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{n\in A} f(n))$ (beide als Elemente von $[0, +\infty]$) übereinstimmen! Leiten Sie daraus auch her, dass ein $g : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann integrierbar ist, wenn $\sum_{n\in\Omega} |g(n)| < +\infty$, und dass in dem Fall $\sum_{n\in\Omega} g(n) = \int_\Omega g \, d\mu$.

   Hinweis: $\{n \in \Omega : f(n) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{n \in \Omega : f(n) > \frac{1}{k}\}$. Unterscheiden Sie die Fälle, dass $\{n \in \Omega : f(n) > \frac{1}{k}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ endlich ist, und dass $\{n \in \Omega : f(n) > \frac{1}{k}\}$ für ein k unendlich ist.

2. Man berechne das Volumen von $B \subseteq \mathbb{R}^3$, also $\lambda_3(B)$, wobei B die Menge aller Vektoren, die über der xy-Ebene, unterhalb des Paraboloids $x^2+y^2-z = 0$ und innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = a^2$ mit einem festen $a > 0$ liegen, also
$$B = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

3. Man weise die aus der Schule bekannte Tatsache nach, dass das Volumen einer Pyramide gleich Grundfläche mal Höhe durch drei ist. Dabei muss die Grundfläche aus $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ sein.

4. Man betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(\xi, \eta)^T := \begin{cases} \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\,, & \text{falls } (\xi, \eta)^T \neq (0, 0)^T\,, \\ 0\,, & \text{falls } (\xi, \eta)^T = (0, 0)^T\,, \end{cases}$$
   und berechne
$$\int_{(0,1]} \left(\int_{(0,1]} f(\xi, \eta)^T \, \mathrm{d}\lambda(\xi) \right) \mathrm{d}\lambda(\eta) \quad \text{und} \quad \int_{(0,1]} \left(\int_{(0,1]} f(\xi, \eta)^T \, \mathrm{d}\lambda(\eta) \right) \mathrm{d}\lambda(\xi)\,.$$
   Ist $f|_{(0,1]\times(0,1]}$ nach $\lambda_2|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{(0,1]\times(0,1]}}$ integrierbar? Weiters berechne man
$$\int_{(0,1]\times(0,1]} \max(f, 0) \, \mathrm{d}\lambda_2 \quad \text{sowie} \quad \int_{(0,1]\times(0,1]} -\min(f, 0) \, \mathrm{d}\lambda_2\,.$$

5. Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $c \geq 0$. Zeigen Sie, dass durch
$$V(x, y)^T := cy + \frac{y}{\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 + 1}{(t - x)^2 + y^2} \, \mathrm{d}\mu(t)$$
   eine Funktion $V : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)}$ messbar ist. Zeigen Sie weiters mit Hilfe von Übungsaufgabe 5 der 7ten Übung, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$
$$\lim_{y\searrow 0} \int_{(a,b)} V(x, y)^T \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(a,b)} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t)\,.$$

Anmerkung: Dieser Sachverhalt wird als *Stieltjessche Umkehrformel* bezeichnet, weil man das Maß μ aus der Funktion $V(x,y)^T$ rekonstruieren kann.

6. Für $t > 0$ setze
$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos x^2 \, \mathrm{d}x, \quad G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x^2 \, \mathrm{d}x \,.$$
Man zeige $F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{t}{1+t^2} = 2tF(t)G(t)$. Begründung!

   Hinweis: Zur Berechnung von $F(t)^2, G(t)^2, F(t)G(t)$ schreiben Sie die beiden Faktoren als Integrale mit verschiedenen Integrationsvariabeln!

7. Zeigen Sie, dass $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \mapsto \log z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ über jede beschränkte Teilmenge $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach λ_2 integrierbar sind. Dabei sei festgelegt, dass $\log(re^{\mathrm{i}\phi}) = \ln r + \mathrm{i}\phi$ mit $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.

8. Man berechne für $a, b, c > 0$ die Fläche der Ellipse $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}$ und das Volumen des Ellipsoid $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$.

9. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral der Funktion
$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \in x \mapsto \mathbb{1}_{K_1^{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)}(0)} \cdot \|x\|_2^\alpha \in [0, +\infty]$$
auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach λ_n endlich?

   Hinweis: n-dimensionale Kugelkoordinaten.