Übungen zu Analysis 3, 12. Übung

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x + 2n) = \max\{1 - |x|, 0\}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in (-1, +1]$. Liegt f in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und hat f eine schwache Ableitung? Wenn ja, so bestimme man die erste $(1 = \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^1)$ schwache Ableitung in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$!

2. Für ein offenes $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$, ein $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ und allen $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ mit $\beta \leq \alpha$ habe $f \in L^1_{loc}(G)$ eine schwache β-te Ableitung. Hier bedeutet $\beta \leq \alpha$, dass $\alpha_j \leq \beta_j$ für alle $j = 1, \dots, d$. Weiters sei $\psi \in C^\infty(G)$.

   Zeigen Sie durch Induktion nach $|\alpha|$, dass dann $\psi \cdot f$ in $L^1_{loc}(G)$ liegt und eine schwache α-te Ableitung hat, wobei λ_d-fast überall

   $$D^\alpha(\psi \cdot f) = \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \underbrace{\binom{\alpha}{\beta}}_{:= \prod_{j=1}^d \binom{\alpha_j}{\beta_f}} D^\beta(\psi)\, D^{\alpha - \beta}(f)\,.$$

3. Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass ψ auf $[0, \frac{1}{2})$ den Wert 1 und auf $(\frac{1}{2}, 1]$ den Wert -1 annimmt; bei $\frac{1}{2}$ und außerhalb von $[0, 1]$ sei sie Null. Nun setze für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 \leq k < 2^j$

   $$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad x \in [0, 1]\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $\{\psi_{j,k}|_{[0,1]} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq k < 2^j\}$ der Haarschen Funktionen ein Orthogonalsystem auf $L^2([0, 1], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}}, \mathbb{C})$ bildet!

   Hinweis: Skizzieren Sie die Funktionen.

4. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, komplexwertige und messbare Funktion. Wir nehmen auch an, dass f 2π-periodisch ist, also $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man beweise, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$\int_{[-\pi,\pi]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,2\pi]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[\alpha,\alpha+2\pi]} f \, \mathrm{d}\lambda$$

   in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch die beiden anderen existieren und alle diese Integrale übereinstimmen.

   Weiters zeige man, dass für ungerade $(g(-x) = -g(x))$ integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = 0$, und dass für gerade $(g(-x) = g(x))$ integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{[0,b]} f \, \mathrm{d}\lambda$.

5. Weisen Sie ausgehend von (17.15) die Gleichung (17.17) nach und zeigen Sie, dass $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) \, \mathrm{d}t = 2\pi$, wobei $D_k(t)$ wie in (17.16) ist.

6. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Man bestimme die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (f, e_n) e_n$ von f bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(inx)$ in dem Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$!

7. Zeigen Sie, dass in $L^2([-\pi,\pi],\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]},\frac{1}{2\pi}\lambda,\mathbb{C})$

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cos 3x,\sin 3x,\dots$$

ein Orthogonalsystem abgibt. Wie muss man diese Funktionen skalieren, um ein Orthonormalsystem $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ zu erhalten? Zeigen Sie, dass $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ dann sogar eine Orthonormalbasis ist! Diskutieren Sie auch den Zusammenhang der Fourierreihe bezüglich dieser Orthonormalbasis und der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ aus dem vorherigen Beispiel. Schließlich gebe man die Fourierreihe bezüglich $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ für die Funktion aus dem vorherigen Beispiel an!

8. Sei $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]},\frac{1}{2\pi}\lambda,\mathbb{C})$ ungerade, also $f(-x) = -f(x)$. Zeigen Sie, dass dann in der Fourierreihe von f bezüglich der Orthonormalbasis $\{f_n : \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ aus dem vorherigen Beispiel nur $\sin mx$ Terme auftreten!

   Betrachten Sie konkret $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 1 - x^2$ für $x \in (0,\pi]$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt wird, und berechnen Sie die entsprechende Fourierreihe.

9. Für $t \in (0,+\infty)$ betrachte man die Funktion

$$f(t) = \int_{(0,+\infty)} \mathrm{e}^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

   Man berechne $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ sowie $f'(t)$ für $t \in (0,+\infty)$. Begründen Sie Ihre Antwort! Man leite daraus $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ für $t \in (0,+\infty)$ her.

   Schließlich bestimme man das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$!

   Hinweis zum letzten Teil: Schreiben Sie $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ und auch $f(t)$ als Summe der uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_0^1 \cdots + \int_1^{+\infty} \dots$, wenden Sie auf das zweite Integral partielle Integration an, sodass ein absolut uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion Integrand ist. Bilden Sie schließlich $\lim_{t\to 0+} f(t)$!