Übungen zu Analysis 3, 9. Übung

1. Berechne für $a, b, c > 0$ das Volumen des beschränkten Körpers der von der Fläche

$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\right\}$$

   begrenzt wird.

   Hinweis: $T : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)^T \mapsto (ax^3, by^3, cz^3)^T \in \mathbb{R}^3$ eingeschränkt auf die richtige Menge ergibt einen Diffeomorphismus. Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $(x,y,z)^T = T \circ \phi(r, \varphi, \theta)$, wobei ϕ der Kugelkoordinatendiffeomorphismus ist.

2. Skizzieren Sie die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2\,,$$

   und berechnen Sie die Oberfläche der durch $x, y, z \geq 0$ festgelegten Teilmenge von M.

3. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder $Z_1 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z_2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$. Bestimmen Sie ∂G, $\partial^s G$ und die Oberfläche von $\partial^s G$!

4. Bezeichnet μ das Oberflächenmaß auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, so zeige man, dass $\mu = \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,2\pi)}} \circ T^{-1}$, wobei $T : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ durch $T(t) = \exp(it)$ definiert ist.

5. Man berechne

$$\int_F x_1 \, \mathrm{d}\mu(x_1, x_2, x_3)^T\,,$$

   wobei F das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ im $\mathbb{R}^3$ ist. F ist dabei als Teilmenge der Mannigfaltigkeit M mit Oberflächenmaß μ zu betrachten, wobei M die affine Ebene ist, die durch diese drei Punkte geht.

6. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, $r > 0, x \in \mathbb{R}^p$ fest. Zeigen Sie, dass mit M auch $N := rM + x$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist, dass für $B \subseteq M$ genau dann $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$, wenn $rB + x \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_N$, dass in dem Fall

$$\mu_N(rB + x) = r^d \mu_M(B)$$

   und dass

$$\int_N f \, \mathrm{d}\mu_N = r^d \int_M f(ry + x) \, \mathrm{d}\mu_M(y)$$

   für jede messbare Funktion $f : N \to [0, +\infty]$ und für jede messbare Funktion $f : N \to [-\infty, +\infty]$ ($\mathbb{C}$) in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte Seite es tut.

7. Sei $f(x) = \mathbb{1}_{[-c,c]}(x)$ mit einem festen $c > 0$ und $g(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Berechnen Sie die Faltung $f * g$.

8. Sei $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und $g_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $g_n * h$ sowie $(g_n * h) * h$. Sind die erhaltenen Funktionen stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar?

9. Für die offene Einheitskugel $U_1(0)$ im $\mathbb{R}^2$ bezüglich $\|.\|_2$ sowie für die Abbildungen $f = \mathbb{1}_{U_1(0)}$ und $g((x,y)^T) = x^2 + y^2$ gebe man an, für welche $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ die Faltung $f * g((x,y)^T)$ definiert ist! Für diese $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ berechne man $f * g((x,y)^T)$!