Übungen zu Analysis 3, 6. Übung

1. Wo besitzt die Funktion $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$f(x_1, \dots, x_n)^T = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$$

   ein lokales bzw. globales Extremum unter der Nebenbedingung $x_1 \dots x_n = a^n$ mit einem festen $a > 0$. Man verwende die Lagrangesche Multiplikatorenregel.

2. Konstruieren Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel einen Kegel mit Höhe h und Grundkreisradius r maximalen Volumens einmal bei vorgegebener Oberfläche ohne Boden und einmal bei vorgegebener Gesamtoberfläche. Geben Sie jeweils das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius an.

   Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für die Kegeloberfläche aus der Schule und maximieren Sie das Quadrat des Volumens!

3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel alle Punkte der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung

   $$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$$

   definiert ist, welche vom Ursprung kleinsten Abstand haben.

4. Sei $K = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ und $A = \{(\xi, \eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man bestimme $x \in K, y \in A$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel (!!) so, dass $d(x, y) = d(A, K)$. Man zeige auch, dass x normal auf die Gerade A steht.

5. Seien $a, b, c > 0$ und $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das Maximum der Volumina von in K enthaltenen Quadern mit achsenparallelen Kanten.

6. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder $Z_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$. Bestimmen Sie den Rand ∂G, $\partial^s G$ und $\partial^o G$! Skizze!

7. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $dF(x) \neq 0$ für alle $x \in M := \{y \in O : F(y) = 0\}$.

   Gibt es auf M eine überall definierte, stetige Normalenfunktion? Zeigen Sie anschließend, dass $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ sind.

   Zeigen Sie weiters, dass es für $x \in M$ beliebig nahe an x Punkte aus $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und Punkte aus $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ gibt, also dass x im Abschluss von G und von H ist.

   Schließlich zeige man, dass $\partial G \cap O = M$ und $\partial^s G \cap O = \partial^o G \cap O = M$.

   Hinweis: Was würde etwa aus $U_\epsilon^{\mathbb{R}^p}(x) \subseteq \{x \in O : F(x) \leq 0\}$ mit $F(x) = 0$ für $dF(x)$ folgen?

8. Betrachte die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\phi((t,\alpha)^T) := \Big((1 + t\cos\frac{\alpha}{2})\cos\alpha, (1 + t\cos\frac{\alpha}{2})\sin\alpha, t\sin\frac{\alpha}{2}\Big)^T,$$

und setze $M := \phi\big((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}\big)$. Zeigen Sie, dass für jedes Intervall (a,b) mit $b - a \leq 2\pi$ die Einschränkung $\phi|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(a,b)}$ eine Einbettung in M abgibt, und dass die Menge M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, welche man *Möbiusband* nennt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \phi\big([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]\big) \setminus \phi\big(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times [0, 2\pi]\big)$ offen in $\phi\big([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]\big)$ ist. Anschließend weise man nach, dass für $|b - a| < 2\pi$ die Abbildung $\phi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b] \to \phi\big([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b]\big)$ ein Homöomorphismus ist, und damit dann dass auch $\phi : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b) \to \phi\big((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b)\big)$ ein Homöomorphismus mit einer in M offenen Menge $\phi\big((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b)\big)$ ist.

9. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ (der Raum aller komplexwertigen integrierbaren Abbildungen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ führe man genau aus, warum

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$