Übungen zu Analysis 3, 4. Übung

1. Mit der Notation aus dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen, wobei hier die Elemente von D bzw. allgemeiner von $\mathbb{R}^{m+n}$ als $(x, y)^T$ statt (x, y) geschrieben werden, sei $T : U \to D$ definiert durch $T(x) = (x, g(x))^T$. Man zeige mithilfe der Kettenregel, dass für jedes $x \in U$ die n Spalten von $dT(x)$ orthogonal auf die m Spalten von $[dF(x, g(x))^T]^T$ stehen und
$$\mathbb{R}^{m+n} = R \oplus N$$
gilt, wobei R die lineare Hülle aller m Spalten von $[dF(x, g(x))^T]^T$ und N die lineare Hülle aller n Spalten von $dT(x)$ ist.

   Sei zusätzlich $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $u \in U$ ein lokales Extremum von $h(x) := f(x, g(x))^T$ als Abbildung von U nach $\mathbb{R}$.

   Zeigen Sie ebenfalls mit der Kettenregel, dass dann alle n Spalten von $dT(u)$ orthogonal auf den Vektor $[df(u, g(u))^T]^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ stehen und dieser Vektor damit in R liegt, wodurch $[df(u, g(u))^T]^T = [dF(u, g(u))^T]^T\,(-\mu)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}^m$.

2. Seien $F : D \to \mathbb{R}^m$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit einem offenen $D \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Wir setzen $M := \{z \in D : F(z) = 0\}$.

   Zeigen Sie mithilfe der vorherigen Aufgabe, dass, wenn $M \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{R}$ bei $w \in M$ ein lokales Extremum hat, wobei $dF_2(w)$ $(\in \mathbb{R}^{m\times m})$ als regulär vorausgesetzt ist, es ein $\mu \in \mathbb{R}^m$ gibt mit
$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(w) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(w) = 0, \quad i = 1, \ldots, m+n\,.$$

   Anmerkung: Um lokale Extrema von $M \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{R}$ zu finden, sucht man $w \in D$ und $\mu \in \mathbb{R}^m$ derart, dass $F_j(w) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$ und dass obige Gleichung gilt. Die Menge der Vektoren w aus der Menge aller Lösungen w, μ dieser Gleichungen umfasst die Menge aller lokalen Extrema, muss aber nicht mit dieser übereinstimmen.

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi+\eta+\zeta\\ \xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta\\ \xi\eta\zeta\end{pmatrix}.$$
   Zeigen Sie, dass f im Sinne des Umkehrsatzes bei $(x, y, z)^T$ genau dann lokal umkehrbar ist, wenn $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$. Geben Sie in dem Fall auch die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(x, y, z)^T$ an!

4. Man gebe für die folgenden zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jeweils eine möglichst große, offene Teilmenge C von $\mathbb{R}^2$ derart an, dass $f|_C$ und $g|_C$ einen Diffeomorphismus abgeben. Man gebe zu jedem solchen C auch die Bildmenge D an.
$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2-y^2\\ 2xy\end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\cos y\\ \mathrm{e}^x\sin y\end{pmatrix}.$$

Weiters gebe man $df(x)$ und $dg(x)$ sowie $\det df(x)$ und $\det dg(x)$ an.

5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Affensattel, also die Menge aller $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit

$$3z + 3xy^2 - x^3 = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie ihre Dimension!

6. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $O \subseteq M$ offen bezüglich der Spurtopologie. Führen Sie sorgfältig aus, dass O ebenfalls eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

   Weiters zeige man sorgfältig, dass $M \subseteq \mathbb{R}^p$ genau dann eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es für jedes $x \in M$ eine bezüglich der Spurtopologie offenes $O \subseteq M$ mit $x \in O$ derart gibt, dass O eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

7. Ist $T : O \to P$ ein Diffeomorphismus mit offenen Teilmengen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$ und ist M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ mit $M \cap O \neq \emptyset$, so zeige man, dass auch $T(M \cap O)$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

8. Ist $M_i, i \in I$, eine Familie von d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$ derart, dass für jedes $j \in I$, $M_j \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} = \emptyset$, so zeige man, dass auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine Mannigfaltigkeit von Dimension d ist.

   Schließlich gebe man ein Beispiel im Fall $d = 1$, $p = 2$ und $I = \{1, 2\}$ an, das zeigt, dass der Abschluss in obiger Voraussetzung notwendig ist. Man finde also zwei 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 im $\mathbb{R}^2$, die nur $\overline{M_1} \cap M_2 = \emptyset$ erfüllen, aber derart sind, dass $M_1 \cup M_2$ keine Mannigfaltigkeit abgibt.

9. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen, der vermöge der Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

   mit dem $\mathbb{R}^4$ identifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass dann

$$O(2) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T \text{ ist eine orthogonale Matrix } \right\}$$

   als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ eine Mannigfaltigkeit abgibt. Bestimmen Sie die Dimension von $O(2)$!