Übungen zu Analysis 3, 11. Übung

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_\infty > 0$. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_\Omega |f|^n\,\mathrm{d}\mu} = \|f\|_\infty\,.$$
Hinweis: Heben Sie im Zähler und Nenner eine geeignete Potenz von $\|f\|_\infty$ heraus.

2. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, +\infty]$, $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, +\infty]$. Zeigen Sie $f_n \to f$ μ-fast überall, wenn $\sum_{n=1}^\infty \|f - f_n\|_p < +\infty$.

   Hinweis: Punktweise Konvergenz fast überall ist äquivalten zu
$$\mu\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\leq n\in\mathbb{N}} \big\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\big\}\Big) = 0 \ \text{ für alle } \ m \in \mathbb{N}\,.$$
   Weiters gilt $\mu(\big\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\big\}) \leq \frac{1}{\delta^p}\|f\|_p^p$ im Fall $p \in [1, +\infty)$.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für $p, q \in [1, +\infty)$ die Menge $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \cap L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \cap L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bezüglich $\|.\|_p$ ist. Hier werden wie üblich zwei Funktionen identifiziert, wenn sie μ-fast überall übereinstimmen.

4. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu)$ Messräume mit jeweils σ-endlichem Maß. Zeigen Sie, dass dann die lineare Hülle aller Funktionen der Bauart $\Omega \times \Upsilon \ni (x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ mit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $g \in L^1(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{C})$ dicht in $L^1(\Omega \times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu, \mathbb{C})$ ist.

5. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ vermöge einer geeigneten Abbildung (welche?) isometrisch isomorph zu $L^2(\Omega \times \{1, 2\}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\{1, 2\}), \mu \otimes \xi, \mathbb{R})$ ist, wobei $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ die Potenzmenge von $\{1, 2\}$ und ξ das Zählmaß darauf bezeichnet.

6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $p \in [0, +\infty)$. Weiters sei $\phi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass
$$M : f \mapsto \phi \cdot f$$
   ein beschränkter, linearer Operator von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ in sich ist, wobei die Abbildungsnorm $\|M\|$ von M mit $\|\phi\|_\infty$ übereinstimmt.

   Hinweis: Um $\|M\| \geq \|\phi\|_\infty$ zu zeigen, betrachte man für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die Charakteristische Funktion zur Menge $\{x \in \Omega : |\phi(x)| > \|\phi\|_\infty - \epsilon\}$.

   Anmerkung: Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < +\infty$ kann man durch die schwächere Voraussetzung der σ-Endlichkeit von μ ersetzen.

7. Unter Verwendung von Korollar 16.6.6 und Beispiel 12.18.10 zeige man, dass für $p \in [1, +\infty)$ die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn)$, $n \in \mathbb{Z}$, dicht in $L^p\big((-\pi, +\pi), \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi)}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi)}}, \mathbb{C}\big)$ bzgl. $\|.\|_p$ liegt. Zeigen Sie denselben Sachverhalt für die Räume $L^p\big((-\pi, +\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi]}}, \mathbb{C}\big)$ und $L^p([-\pi, +\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,+\pi]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,+\pi]}}, \mathbb{C})$.

8. Zeigen Sie, dass $f \mapsto f_t$ für jedes $t \in \mathbb{R}^p$ als Abbildung von $L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ eine isometrische, lineare Bijektion ist.

   Zeigen Sie weiters, dass für $f \in C_{00}(\mathbb{R}^p, \mathbb{C})$ die Funktion $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto f_t \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ gleichmäßig stetig ist.

   Schließlich zeige man, dass für allgemeine $f \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ die Abbildung $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto f_t \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ nicht stetig ist.

9. Seien $(\Upsilon, \mathcal{C})$ ein Messraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $T : \Omega \to \Upsilon$ messbar. Bezeichnet $\mu \circ T^{-1} : \mathbb{C} \to [0, +\infty]$ das durch $\mu \circ T^{-1}(C) = \mu(T^{-1}(C))$ definierte Bildmaß auf $\mathcal{C}$, so zeige man, dass $L^p(\Upsilon, \mathcal{C}, \mu \circ T^{-1}, \mathbb{C})$ für $p \in [1, +\infty]$ mittels der Abbildung $f \mapsto f \circ T$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist. Geben Sie auch ein Beispiel für Ω, Υ und T an, wo dieser Unterraum ungleich $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist!

10. Für $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen bezeichnet $L^1_{loc}(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C})$, oder kurz $L^1_{loc}(G)$, die Menge aller messbaren Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ derart, dass f über jede kompakte Teilmenge von G nach $\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$ integrierbar ist. Diese Funktionen in $L^1_{loc}(G)$ heißen auch lokal integrierbare Funktionen.

    Zeigen Sie, dass ein messbares $f : G \to \mathbb{C}$ genau dann in $L^1_{loc}(G)$ liegt, wenn für jedes $\phi \in C^\infty_{00}(G, \mathbb{C})$ die Funktion $f \cdot \psi$ nach λ_d integrierbar ist.