Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 6. Übung

1. Sei D eine involutive Distribution auf einer Mannigfaltigkeit M. Ist $x \in M$ und sind N_1 und N_2 zwei Integralmannigfaltigkeiten von D mit $x \in N_1 \cap N_2$, so zeige man, dass es eine in M offene Umgebung U von x gibt, sodass $U \cap N_2 = U \cap N_2$.

2. Sei G eine Liegruppe mit neutralem Element e und sie $\mathfrak{g}$ die entsprechende Lie-Algebra. Man fasse den Vektorraum $\mathfrak{g}$ als $\dim G$-dimensionale Mannigfaltigkeit auf.

   Zeigen Sie dann, dass die Abbildung $\exp : X \mapsto \mathrm{Fl}^X(1, e)$ eine C^∞-Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach G ist, sodass $T_0 \exp : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ invertierbar ist.

   Hinweis: Man identifiziere den Tangentialraum von $G \times \mathfrak{g}$ mit $TG \times T\mathfrak{g}$ und betrachte das Vektorfeld $(g, X) \mapsto (X(g), 0)$ $(\in T_gG \times T_X\mathfrak{g} \subseteq TG \times T\mathfrak{g})$. Ist dieses Vektorfeld C^∞? Man bestimme den Fluss davon .....

3. Seien G, H zwei Liegruppen mit den Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und bezeichne mit $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ die entsprechenden Exponentailabbildungen (vgl. letztes Beispiel).

   Ist $\Psi : G \to H$ ein C^∞-Gruppenhomomorphismus, so zeige man, dass $\Psi \circ \exp_G = \exp_H \circ T\Psi$.

4. Beweisen Sie im Detail, dass für einen endlich dimensinalen Vektorraum V mit einer Basis $(b_j)_{j\in J}$ mit $\#J = \dim \mathfrak{V}$ die k-Formen

   $$(\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}})_{(i_1,\dots,i_k)\in J^k}$$

   eine Basis von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ bilden. Weiters beweisen Sie, dass

   $$k! \cdot \mathrm{Alt}(\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \theta_K, & \#K = k \\ 0, & \#K < k \end{cases},$$

   wobei $K = \{i_1, \dots, i_k\}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, sodass $K = \{i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}\}$.

5. Sei $(H, (.,.))$ ein endlich dimensionaler reeller Hilbertraum und sei $B : H \to H^*$ die lineare Bijektion, sodass $(x, y) = B(y)(x)$. Wir versehen H^* mit der Bilinearform

   $$(x^*, y^*) := (B^{-1}x^*, B^{-1}y^*), \quad x^*, y^* \in H^*.$$

   Zeigen Sie: H^* ist damit ein Hilbertraum. Ist $(b_i)_{i\in I}$ eine ONB von H und $(b_i^*)_{i\in I}$ die dazu duale Basis von H^*, so ist $(b_i^*)_{i\in I}$ eine ONB von H^*.

   Zeigen Sie weiters, dass auch $\mathcal{M}_k(H)$ ein eindeutiges Hilbertraum Skalarprodukt $(.,.)$ existiert, sodass

   $$(x_1^* \otimes \dots \otimes x_k^*, y_1^* \otimes \dots \otimes y_k^*) = (x_1^*, y_1^*) \cdot \dots \cdot (x_k^*, y_k^*)$$

   für alle $x_1^*, \dots, x_k^*, y_1^*, \dots, y_k^* \in H^* = \mathcal{M}_1(H)$.

   Ist schließlich $\langle .,. \rangle$ die Einschränkung von $(.,.)$ auf $\mathcal{A}_k(H)$ multipliziert mit $\frac{1}{k!}$, so zeige man, dass

   $$\langle x_1^* \wedge \dots \wedge x_k^*, y_1^* \wedge \dots \wedge y_k^* \rangle = \det((x_i^*, y_j^*)_{i,j=1,\dots,k}).$$

   für alle $x_1^*, \dots, x_k^*, y_1^*, \dots, y_k^* \in H^* = \mathcal{M}_1(H) = \mathcal{A}_1(H)$.

6. Mit der Notation aus dem letzten Bespiel sei $m = \dim H$. Wir setzen auch $\mathcal{A}(H) := \bigoplus_{0\leq k\leq m} \mathcal{A}_k(H)$, wobei hier die direkte und orthogonale Summe gemeint ist - also auch $\mathcal{A}(H)$ zu einem Hilbertraum wird.

   Sei $P : \mathcal{A}(H) \to \mathcal{A}(H)$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{A}_m(H)$. Weiters sei $\Delta \in \mathcal{A}_m(H)$, sodass $\Delta(b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) = 1$ für eine gewisse Durchnummerierung $\{i_1, \dots, i_m\}$ von I und sei $\iota : \mathcal{A}_m(H) \to \mathbb{R}$ die lineare Bijektion mit $\iota(\Delta) = 1$.

   Zeigen Sie zuerst, dass $b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_m}^* = \Delta$. Zeigen Sie weiters, dass

$$(\omega, \nu) \mapsto \iota \circ P(\omega \wedge \nu), \quad \omega, \nu \in \mathcal{A}(H),$$

   eine Bilinearform auf $\mathcal{A}(H)$ ist, und dass es eine eindeutige lineare Abbildung $* : \mathcal{A}(H) \to \mathcal{A}(H)$ (Hodge-Sternoperator) gibt mit $\langle *\omega, \nu\rangle = \iota \circ P(\omega \wedge \nu)$.

   Zeigen Sie auch, dass dabei $*(\mathcal{A}_j(H)) \subseteq (\bigoplus_{0\leq k\leq m,\ k\neq m-j} \mathcal{A}_k(H))^\perp = \mathcal{A}_{m-j}(H)$ und $*(1) = b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_m}^*$, $*(b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_m}^*) = 1$ erfüllt.

7. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass $*$ bzgl. $\langle .,. \rangle$ isometrisch ist, und dass $* \circ *|_{\mathcal{A}_k(H)} = (-1)^{k(n-k)} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{A}_k(H)}$. Bestimmen Sie auch die Adjungierte $*^*$ von $*$.

   Hinweis: Ordnen Sie I so, dass $\{i_1 < \cdots < i_m\} = I$ und bestimmen Sie zuerst $*(b_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{j_k}^*)$ für $\{j_1 < \cdots < j_k\} \subseteq J$.

8. Seien $D, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend, $B \subseteq D$ eine Borelmengeteilmenge der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und sei $\omega \in C^\infty(Q, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d))$. Weiters sei $S : D \to Q$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Man zeige, dass dann $\int_B |S^*(\omega)| = \int_{S(B)} |\omega|$ ($\in [0, +\infty]$) und im Fall, dass dieser Ausdruck endlich ist

$$\int_B S^*(\omega) = \mathrm{sgn}(\det dS(.)) \cdot \int_{S(B)} \omega.$$

   Dabei ist $\mathrm{sgn}(\det dS(.))$ das Vorzeichen von $\det dS(t)$, $t \in D$, das wegen des Nichtverschwindens von $\det dS(t)$ und des Zusammenhangs von D für alle t gleich ist.

   Hier ist $\int_C \omega$ bzw. $\int_C |\omega|$ für eine $\omega \in C^\infty(O, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d))$ mit $C \subseteq O$ definiert als $\int_C \omega(e_1, \dots, e_d)\, d\lambda_d$ bzw. $\int_C |\omega(e_1, \dots, e_d)|\, d\lambda_d$.