Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 5. Übung

1. Geben Sie auf $\mathbb{R}$ jeweils ein überall nicht verschwindendes C^∞-Vektorfeld an, dessen Fluss nicht global bzw. dessen Fluss global ist.

   Hinweis: Von welcher Diffgl. ist $\tan t$ die Lösung?

2. Sei $M = \mathbb{R}^2$ versehen mit dem Atlas $\{\varphi\}$ mit $\varphi := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch ($x = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$)

   $$\mathrm{t}_x\varphi\; X(x) = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{t}_x\varphi\; Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\xi^2}{2} \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Flüsse von X und von Y! Sind diese global? Bestimmen Sie auch die Darstellung X und Y in der Form wie im Beispiel 2 der vierten Übung! (Da $\varphi := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, schreibt man statt $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ auch $\frac{\partial}{\partial \xi}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \eta}$.)

   Schließlich gebe man an, ob das Vektorfeld $X + Y$ einen lokalen oder einen globalen Fluss hat!

3. Mit der Notation des vorherigen Beispiels berechne man das Vektorfeld $[X, Y]$ und den dazugehörigen Fluss! Ist dieser lokal oder global?

4. Sei N eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit von M und sei $X \in \mathfrak{X}(N)$. Zeigen Sie mit einer geeigneten Zerlegung der Eins, dass es ein $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ gibt, sodass X und $\tilde{X}$ ι_N-verwandt sind. Kurz gesagt: Jedes derartige $X \in \mathfrak{X}(N)$ lässt sich auf M fortsetzen.

   Ist das auch immer möglich, wenn $N \subseteq M$ nicht abgeschlossen ist?

   Zeigen Sie auch, dass es auf jeder Mannigfaltigkeit, die eine zu $\mathbb{R}$ diffeomorphe Kopie von $\mathbb{R}$ als abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit enthält, immer ein C^∞-Vektorfeld mit nicht globalen Fluss gibt.

5. Man zeige: Sind $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ und $g : [b, c] \to \mathbb{R}^d$ mit $a < b < c$ zwei C^∞-Funktionen, so gibt es eine C^∞-Funktion $F : [a, c] \to \mathbb{R}^d$ mit $F|_{[a,b]} = f$ und $F|_{[b+\epsilon,c]} = g|_{[b+\epsilon,c]}$ für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ mit $b + \epsilon < c$.

   Dabei nennen wir hier $h : [r, s] \to \mathbb{R}^d$ eine C^∞-Funktion, wenn sich h zu einer C^∞-Funktion auf ein etwas größeres, offenes Intervall fortsetzen lässt.

   Hinweis: Verwenden Sie eine Art C^∞-Konvexkombination!

6. Eine Teilmenge R eines topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängend, wenn aus $A \cup B = R$ mit $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$ immer $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ folgt.

   Zeigen Sie, dass für eine Mannigfaltigkeit M folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) M ist zusammenhängend.

   (b) Zu je zwei Punkte $x, y \in M$ gibt es eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to M$ mit $f(0) = x$, $f(1) = y$.

   (c) Zu je zwei Punkte $x, y \in M$ gibt es eine C^∞-Funktion $f : [0, 1] \to M$ mit $f(0) = x$, $f(1) = y$. C^∞-Funktion auf $[0, 1]$ bedeutet hier C^∞ auf einem etwas größeren offenen Intervall.

7. Man zeige, dass sich jede Mannigfaltigkeit als Vereinigung höchstens abzählbar vieler disjunkter offener und zusammenhängender Teilmengen schreiben lässt.

8. Zeigen Sie, dass man eine C^∞-Liegruppe immer zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit machen kann, sodass $(.,.)_x$ translationsinvariant ist, dh. $(Tl_gX_e, Tl_gY_e)_g = (X_e, Y_e)_e$ für alle $g \in G$ und $X_e, Y_e \in T_eM$.