Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 4. Übung

1. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ für eine C^∞-Mannigfaltigkeit eine C^∞-Abbildung mit mit $c(0) = x$ und $c'(0) = 0$ ($\in T_xM$). Man zeige, dass dann $C^\infty(M, \mathbb{R}) \ni f \mapsto (f \circ c)''(0)$ eine Derivation ist, oder äquivalent: Man zeige, dass es ein $X_x \in T_xM$ gibt, sodass $X_x f = f \mapsto (f \circ c)''(0)$.

2. Für jede Karte φ auf einer Mannigfaltigkeit seien $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$, $j = 1, \ldots, d$ die aus der Vorlesung bekannten Vektorfelder $x \mapsto \frac{\partial}{\partial \varphi_j}|_x$ aus $\mathfrak{X}(U_\varphi)$ aus der Vorlesung.

   Man zeige: Ein Vektorfeld $X : M \to TM$ ist genau dann ein C^∞-Vektorfeld, wenn für jede Karte φ auf M

   $$X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(x), \; x \in U_\varphi,$$

   für eindeutige $a_1, \ldots, a_d \in C^\infty(U_\varphi, \mathbb{R})$.

3. Für eine Karte φ seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ auf U_φ dargestellt wie im letzten Beispiel mit C^∞-Funktionen $a_1, \ldots, a_d$ und $b_1, \ldots, b_d$. Man stelle dann $[X, Y]$ auf U_φ auch dar in der Form

   $$[X, Y](x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(x), \; x \in U_\varphi.$$

   Wie lassen sich die Funktionen $c_1, \ldots, c_d$ durch die Funktionen $a_1, \ldots, a_d$ und $b_1, \ldots, b_d$ ausdrücken?

4. Eine Abbildung $(.,.) : x \mapsto (.,.)_x$, die jedem x in einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ein positiv definites Skalarprodukt auf T_xM zuordnet, sodass $x \mapsto (X(x), Y(x))_x$, $x \in M$, für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ eine $\mathbb{R}$-wertige C^∞-Abbildung ist, nennen wir C^∞-Skalarprodukt.

   Man zeige mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins, dass jede C^∞-Mannigfaltigkeit mit einem C^∞-Skalarprodukt $(.,.)$ versehen werden kann.

   Bemerkung: Mannigfaltigkeiten versehen mit einem derartigen Skalarprodukt heißen Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

5. Ein Vektorraum $\mathfrak{V}$ über einem Körper versehen mit einer bilinearen Abbildung $[.,.] : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$, sodass

   $$[x, y] = -[y, x] \;\text{ und }\; [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

   für alle $x, y, z \in \mathfrak{V}$, nennt man Lie-Algebra.

   Zeigen Sie:

   (a) $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Kreuzprodukt ist eine Lie-Algebra.

   (b) Ist $\dim \mathfrak{V} = 2$, sodass $\operatorname{span}\{x, y\} = \mathfrak{V}$, so ist $(\mathfrak{V}, [.,.])$ eine Lie-Algebra, wobei $[.,.] : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ durch bilineare Fortsetzung durch $[x, x] = 0 = [y, y]$ und $[x, y] = y$ bestimmt ist!

(c) Für jede assoziative Algebra $(X, \cdot)$ macht $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$ den Raum $(X, [.,.])$ zu einer Lie-Algebra. Was bedeutet in diesem Fall, dass $[A, B] = 0$ für alle $A, B \in X$?

6. Sei G eine C^∞-Lie Gruppe und $X_e \in T_e G$, wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Zeigen Sie, dass $g \mapsto X(g) = T_e l_g X_e$ ein linksinvariantes, unendlich oft differenzierbares Vektorfeld auf G ist.

7. Man konstruiere eine C^∞-Funktion f, die $[0, 1)$ auf $[0, +\infty)$ so abbildet, dass $f|_{[0,\frac{1}{2}]} = \mathrm{id}_{[0,\frac{1}{2}]}$. Man zeige mit Hilfe einer solchen Funktion f, dass man für eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit M immer einen Atlas findet, der nur Karten φ enthält, sodass $D_\varphi = \mathbb{R}^d$.

8. Man konstruiere eine C^∞-Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, derart, dass für gewisse $-1 < c < 0 < d < 1$

$$f(t) = (t, 0)^T, \quad t \in [-1, c], \quad f(t) = (0, t)^T, \quad t \in [d, 1],$$

und $f(0) = (0, 0)^T$ sowie $f'(s) \neq 0$ für alle $s \in [-1, 1]$.