Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 3. Übung

1. Sind folgende Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ als C^∞-MF? Begründung!

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - x^2 - y^2 = 0\}$

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max(|x|, |y|, |z|) = 1\}$

   (d) $\{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}, t > 0\} \cup \{(t, -t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$

2. Seien L, M zwei C^r-Mannigfaltigkeit und seien $P \subseteq L$ und $N \subseteq M$ jeweils Teilmannigfaltigkeiten. Weiters seien $f : L \to N$ und $g : L \to M$ Abbildungen. Man zeige, dass mit g auch $g|_P$ eine C^m-Abbildung ist.

   Außerdem zeige man, dass $f : L \to N$ genau dann C^m ist, wenn f als Abbildung von L nach M eine C^m-Abbildung ist.

3. Man zeige, dass die Menge $O(n)$ aller orthogonaler $n \times n$-Matrizen eine Teilmannigfaltigkeit von $GL(n, \mathbb{R})$ mit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ abgibt. Man zeige auch, dass dann $O(n)$ auch eine C^∞-Liegruppe ist.

   Hinweis: Betrachte $h : A \mapsto AA^T$ als Abbildung von $GL(n, \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^{n\times n}$. Für ein $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial h}{\partial V}(B)$ für $B \in GL(n, \mathbb{R})$ mit Hilfe von $\lim_{t\to 0} \frac{h(B+tV)-h(B)}{t}$. Man leite daraus her, dass das Bild von $dh(B)$ ($\in L(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$) genau alle symmetrischen $n \times n$-Matrizen sind. Was bedeutet das für den Rang von $T_B h$?

4. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass $\mathfrak{t}_B \operatorname{id}_{GL(n)} T_B \iota_{O(n)}(T_B O(n))$ - dabei ist $\iota_{O(n)} : O(n) \to GL(n, \mathbb{R})$ die Einbettungsabbildung - aus allen $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besteht, für die $VB^T + BV^T = 0$ gilt oder äquivalent für die $B^{-1}V \in \mathfrak{o}(n)$ gilt, wobei $\mathfrak{o}(n)$ die Menge aller reellen schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen sind.

5. Man zeige, dass $f : A \mapsto \exp(A)$ den $\mathbb{R}^{n\times n}$ nach $GL(n, \mathbb{R})$, den $\mathfrak{s}l(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \operatorname{tr} A = 0\}$ nach $SL(n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{o}(n)$ nach $O(n)$ hinein abbildet. Sind diese Abbildungen C^∞?

   Falls ja, dann berechne man $df(0)$ (f als Abbildung von $\mathbb{R}^{n\times n}$ nach $\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet) und zeige damit, dass $T_0 f$ in allen 3 obigen Fällen eine bijektive Abbildung von $T_0\mathbb{R}^{n\times n}$ nach $T_I GL(n, \mathbb{R})$, von $T_0\mathfrak{s}l(n)$ nach $T_I SL(n, \mathbb{R})$ und von $T_0\mathfrak{o}(n)$ nach $T_I O(n)$ ist.

   Hinweis: Zeige Zunächst mit Hilfe der Jordanschen Normalform $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$!

6. Zeigen Sie, dass auch $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$ sowie $O^+(n) := O(n) \cap SL(n)$ Lie-Gruppe sind! Welche Dimension haben diese? Man stelle auch $T_B O^+(n)$ und $T_B O(n)$ in Beziehung, wenn $B \in O^+(n)$!

7. Man zeige für $n = 2$, dass die Funktion f in vorletzten Beispiel in allen drei Fällen nicht surjektiv ist. Man zeige auch, dass $\exp : \mathfrak{o}(n) \to O^+(n)$ surjektiv ist.

   Hinweis: Im Fall der GL bzw. O ist diese Liegruppe nicht zusammenhängend. Warum ? Im Fall $SL(2)$ betrachte man $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Seien M und L beide C^r-Mannigfaltigkeiten, sei $f : M \to L$ eine C^r-Abbildung, und sei $N \subseteq L$ eine Teilmannigfaltigkeit. Man zeige: Gilt $T_x f(T_x M) + T_{f(x)}\iota_N T_{f(x)} N = T_{f(x)} L$ für alle $x \in f^{-1}(N)$, so ist $f^{-1}(N)$ eine Teilmannfigfaltigkeit von M. Wie ist ihre Dimension?