Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 2. Übung

1. Man zeige: Ist $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $0 \in O$, und ist $f \in C^\infty(O, \mathbb{R})$, so gibt es $f_j \in C^\infty(O, \mathbb{R})$, sodass für alle $y \in O$

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{d} x_j f_j(x),$$

wobei $f_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt$.

2. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Wir versehen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit eine Äquivalenzrelation:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists U \in \mathfrak{U}(x) : \ f|_U = g|_U.$$

Die Äquivalenzklassen $\mathcal{E}_x := C^\infty(M, \mathbb{R})/\sim$ heißen Keime. Man zeige, dass $\sim$ mit $+$ und $\cdot$ verträglich ist, und dass damit die Keime ein Algebra abgeben.

Weiters zeige man, dass für ein offenes $O \subseteq M$ mit $x \in O$ die Abbildung $[f] \mapsto [f|_O]$ von $C^\infty(M, \mathbb{R})/\sim$ nach $C^\infty(O, \mathbb{R})/\sim$ immer eine lineare Bijektion ist.

Schließlich zeige man, dass $[f] \mapsto f(x)$ ein wohldefiniertes lineares Funktional auf $C^\infty(M, \mathbb{R})/\sim$ ist.

3. Eine Derivation auf $\mathcal{E}_x := C^\infty(M, \mathbb{R})/\sim$ ist ein $\nu \in \mathcal{E}_x^*$, das neben der Linearität auch

$$\nu([f] \cdot [g]) = g(x) \cdot \nu([f]) + f(x) \cdot \nu([g])$$

erfüllt. Seien $\mathcal{D}_x$ alle Derivationen auf $\mathcal{E}_x$.

Man zeige, dass $\mathcal{D}_x$ ein Unterraum von $\mathcal{E}_x^*$ ist und dass $\nu([c]) = 0$ für alle konstanten c.

Man zeige weiters, dass für jedes $X \in T_x M$

$$\nu_X : [f] \mapsto Xf \ (= \mathrm{t}_{f(x)}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \ T_x f(X))$$

eine Derivation ist.

4. Man zeige, dass $X \mapsto \nu_X$ eine lineare Bijektion von $T_x M$ auf $\mathcal{E}_x$ ist. Also ist $\mathcal{E}_x$ eine äquivalente Möglichkeit, den Tangentialraum einzuführen.

Hinweis: Wähle eine Karte mit $x \in U_\varphi$ und $\varphi(x) = 0$ und verwende die erste Aufgabe. Wenn $f(y) = f(x) + \sum \varphi_j(y) \cdot f_j(y)$, $y \in M$, eine Funktion aus $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist, was ist dann $\nu(f)$ und was schließt man daraus für $\dim \mathcal{D}_x$?

5. Sei $(M, \mathcal{A})$ eine C^r-Mannigfaltigkeit. Weiters sei H eine endliche Gruppe (bzgl. Hintereinanderausführung) von C^r-Diffeomorphismen auf M. Wir nehmen an, dass $\tau(x) \neq x$ für alle $x \in M$ und alle $\tau \in H \setminus \{\mathrm{id}_M\}$; daher die Fixpunktfreiheit aller nichttrivialen C^r-Diffeomorphismen in H.

Wir versehen M mit einer Äquivalenzrelation, indem wir sagen, dass $x \sim y$, wenn $x = \tau(y)$ für ein $\tau \in H$. Man sagt: eine offene Menge $O \subseteq M$ ist klein, falls $O \cap \tau(O) = \emptyset$ für alle $\tau \in H$.

Man zeige: $M/H := M/\sim$ versehen mit den Finalen Topologie bzgl. $\pi : x \mapsto [x]_\sim$ ist Hausdorff und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die Abbildung π ist eingeschränkt auf jede kleine offene Menge ein Homöomorphismus. In Folge ist π offen. Schließlich ist

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{\varphi \circ (\pi|_{U_\varphi})^{-1} : \varphi \text{ ist mit } \mathcal{A} \text{ verträglich, } U_\varphi \text{ ist klein}\}$$

ein C^r-Atlas auf $M/\sim$.

6. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ isomorph zu $S^d/\{\mathrm{id}_{S^d}, -\mathrm{id}_{S^d}\}$ (siehe letztes Beispiel) ist.

7. Zeigen Sie, dass $g'(s) = T_s g \circ (\mathrm{t}_s\, \mathrm{id}_I)^{-1}(1)$. Zeigen Sie weiters, dass für zwei C^r-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 der Tangentialraum von $M_1 \times M_2$ bei (x_1, x_2) auf kanonische Art und Weise mit $T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ identifiziert werden kann. Wie geht diese Identifizierung von statten?

8. Zeige: Für zwei C^r-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 ist die Produktmannigfaltigkeit $TM_1 \times TM_2$ C^r-Diffeomorph zu $T(M_1 \times M_2)$ ist, wobei die Abbildung gemäß der vorherigen AUfgabe zu wählen ist.