Übungen zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten WS10, 1. Übung

1. Sei M ein topologischer Hausdorffraum mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom und $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller C^r-Atlanten. Man zeige, dass der Begriff äquivalent zu sein auf $\mathfrak{A}$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

   Man zeige weiters, dass es zu einem $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ ein eindeutiges größtes $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ gibt, welches zu $\mathcal{A}$ äquivalent ist, dh. C äquivalent $\mathcal{A}$ folgt $C \subseteq \mathcal{B}$.

   Schließlich zeige man, dass jede nicht in $\mathcal{B}$ enthaltene Karte auch nicht mit $\mathcal{A}$ verträglich ist.

   Solche maximalen Atlanten heißen Differenzierbare Strukturen.

2. Man gebe für $d = 1, 2, 3$ einen Homöomorphismus ϕ auf $\mathbb{R}^d$ explizit an, sodass die Atlanten $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\}$ und $\{\phi\}$ nicht äquivalent sind.

3. Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit versehen mit dem Atlas $\mathcal{A}$.

   Zeigen Sie:

   Ist $\varphi : U \to D$ eine Karte auf $\mathcal{A}$ und ist $h : D \to O$ ein C^r-Diffeomorphismus, dh. h und h^{-1} sind r mal stetig differenzierbar, so ist auch $h \circ \varphi$ eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte.

   Zeigen Sie damit auch: Zu jedem $x \in M$ gibt es eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte φ, sodass U_φ kompakten Abschluss in M hat und sodass $D_\varphi = U_1(0)$.

4. Sei $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ der d-dimensionale Projektive Raum, welcher als die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{d+1}$ definiert ist. Dieser sei mit der finalen Topologie bzgl. der Abbildung $\nu : x \mapsto \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} =: [x]$ von $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ versehen, oder explizit: $O \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ ist per definitionem genau dann offen, wenn $\nu^{-1}(O)$ in $\mathbb{R}^{d+1}$ offen ist.

   Man zeige, dass $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ mit dieser Topologie ein topologischer Hausdorffraum ist, dass dieser das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und dass $\nu : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ offen ist.

5. Für $j = 1, \dots, d+1$ sei mit der Notation aus dem letzten Beispiel $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^d$ mit $U_j := \{[x] \in \mathbb{P}^d(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}, x_j \neq 0\}$ definiert durch

   $$\varphi_j([x]) := \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{d+1}}{x_j}\right)^T,$$

   wobei $x = (x_1, \dots, x_{d+1})^T \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass U_j offen in $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ ist, dass die φ_j wohldefinierte Homöomorphismen sind und schließlich dass $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ versehen mit diesen Abbildungen eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

6. Sei G eine Liesche Gruppe (als Mannigfaltigkeit eine C^r-Mannigfaltigkeit und die Gruppenmultiplikation ist eine C^r-Abbildung) mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass die Linkstranslation $l_g : x \mapsto gx$ ein C^r-Diffeomorphismus ist.

   Sei φ eine Karte mit $e \in U_\varphi$. Man zeige, dass $\{\varphi_g : a \in G\}$ ein zum auf G gegebenen Atlas äquivalenter Atlas ist, wobei $\varphi_g : \varphi \circ l_g$.

7. Man zeige, dass für eine Abbildung $f : M \to N_1 \times N_2$, wobei M, N_1, N_2 und damit auch $N_1 \times N_2$ alle C^r-Mannigfaltigkeiten sind, f genau dann C^m ist, wenn $\pi_1 \circ f$ und $\pi_2 \circ f$ beide C^m-Abbildungen sind.

8. Geben Sie einen Beweis von Lemma 1.1.11!

9. Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, sei φ ein Atlas und sei $h : D_\varphi \to \mathbb{R}^q$ eine C^m-Abbildung, sodass h außerhalb einer kompakten Teilmenge von D_φ den Wert Null annimmt. Man zeige, dass sich dann $h \circ \varphi$ auf M zu einer C^m-Abbildung fortsetzen lässt, wenn man die Fortsetzung so wählt, dass sie außerhalb von U_φ den Wert Null annimmt.